ment la primauté de l'esprit sur la matière. Si l'esprit se laissait dominer, c'en serait fait de notre civilisation et même de toute civilisation humaine. C'est par les études spéculatives de la science pure que l'esprit humain conservera sur les progrès matériels cette domination nécessaire". E noutro ponto: "Sans nier en effet l'importance que peuvent avoir sur l'économie du monde les grands événements politiques, comme les guerres et les révolutions, on doit reconnaître qu'avec le recul de l'histoire, ces événements ont beaucoup moins d'importance que les découvertes scientifiques et industrielles sur la marche et le progrès de l'humanité".

Borel é um pouco exclusivista nesta afirmação, talvez para não fugir ao objecto do artigo. Na verdade o mundo moral, o mundo artístico, etc., fazem também parte das preocupações mais nobres do espírito humano e qualquer aperfeiçoamento nesses campos traz consigo um avanço da civilização. Mas a frase faz-nos recordar uma passagem curiosa do último livro de Remarque: o aluno ouve uma prelecção sôbre história e revolta-se porque não lhe ensinam a história da humanidade mas apenas a história... das guerras da humanidade.

*
* *

Estas considerações foram-nos sugeridas pela leitura de um extracto do último relatório do "Department of Scientific and Industrial Research"[2] (Inglaterra), referente ao exercício de Agôsto de 1930 a Julho de 1931. A repercussão imediata da investigação científica sôbre a indústria, e portanto sôbre a economia nacional, está neste relatório claramente posta em evidência, com dados práticos, com resultados patentes. E causa admiração o verificar a maneira como o estado inglês dá a sua atenção e auxílio a êste problema.

Vale a pena transcrever alguns números apontados no relatório.

A citada instituïção subsidia um grande número de repartições e secções de investigação, sociedades científicas, etc. Tem dois conselhos superiores: o "Privy Council", cujo relatório vem assinado por Stanley Baldwin, e o "Advisory Council" de que é presidente Lord Rutherford.

O orçamento global foi de 740.520 £, cêrca de 82.000 contos da nossa moeda. Como as receitas atingiram o valor de 184.629 £, o Estado inglês dispendeu com a investigação científica no referido período a quantia de 555.691 £, (61.000 contos aproximadamente).

O Laboratório Nacional de Física absorveu só à sua parte cêrca de 209.000 £. Pouco mais de metade desta verba foi compensada pelas receitas, figurando sôbre esta rubrica subsídios de várias empresas industriais e de outros ministérios e, ainda, certos fundos especiais (legados, etc.).

Distribuição de verbas por outros serviços (em números redondos):

Lab. de Investigação Química	20.000 £
Métodos de Construção	30.400 "
Combustíveis	87.400 "
Rádio-telegrafia e telefonia	12.100 "
Águas contaminadas	10.000 "
Produtos florestais	43.200 "
Alimentos	50.000 "

Desta última verba só 1/4, aproximadamente corresponde a encargo do Estado, sendo o restante coberto pelas receitas.

Algumas verbas distribuídas pelas associações de investigação:

Algodão	15.800 £
Aparelhos científicos	8.450 "
Metais "não ferrosos"	8.000 "
Indústrias de lã	7.500 "
Federação dos fabricantes de ferro e aço	6.500 "
Ferro fundido	4.800 "
Tintas e vernizes	4.750 "

[2] V. "Nature", N.º 3252. Vol. 129 – 1932 – pág. 303.

Na seqüência do relatório dá-se conta dos objectivos atingidos. Para não alongarmos esta exposição destacaremos apenas dois factos que parecem mais interessantes.

A Associação Inglesa para a Investigação sôbre Fotografia (British Photographic Research Association) deixou de ser subsidiada pelo Govêrno a partir de Novembro de 1930 porque os industriais da especialidade, reconhecendo as vantagens duma investigação científica metodizada, tomaram sôbre si o encargo de assegurar a continuïdade de tais estudos. O relatório faz notar que o gasto total de 26.597 £, distribuído por dôze anos de exercício, realizou totalmente o plano do Govêrno. Anuncia também que em breve, o mesmo se dará com outros serviços subsidiados actualmente. A melhoria dos artigos fotográficos ingleses é evidente e deriva da acção daquele organismo. Quanto aos resultados das investigações respeitantes ao Ferro Fundido (Cast Iron Research Association), — descoberta do "Silal" e estudos sôbre areias de fundição e materiais refractários — calcula-se no relatório que êles representam uma economia anual de 100.000 £ para a indústria inglêsa!

Não podemos evidentemente transcrever o extenso relatório, mas aconselhamos a sua leitura a quem se interessar pelo assunto.

Pormenores à primeira vista insignificantes, dificuldades mínimas encontradas na indústria mais especializada, são estudados com método e preseverança. Ora é sabido que, muitas vezes, uma economia importante resulta precisamente da resolução dêstes pequenos problemas.

Vemos, pois, que as duas feições da ciência são tratadas condignamente pelo Estado Inglês, no campo de acção do Department of Scientific and Industrial Research, absorvendo a ciência pura (laboratórios de Física e de Química) quási metade dos subsídios.

O exemplo da Inglaterra não é o único, pelo contrário; o "modus faciendi" é que varia de nação para nação. Se nos referimos àquele país é porque lêmos recentemente o citado relatório e a organização inglesa nos parece modelar.

Em Portugal (era inevitável que falássemos em nós...) já alguma coisa há feito no sentido de fomentar a investigação científica. Existe um organismo — a Junta de Educação Nacional, cujos esforços, talvez ainda imperfeitamente compreendidos, ou mesmo ignorados de muita gente, são dignos de atenção. Infelizmente a sua acção tem sido limitada por falta de verba suficiente.

Esta afirmação não envolve censura; possìvelmente o Estado não dará mais, porque... não tem de sobra. Há casos, porém, em que os sacrifícios plenamente se justificam pelos frutos que produzem e êste é, sem dúvida, um deles. O relatório que citamos demonstra-o cabalmente.

NOTAS SÔBRE A DETERMINAÇÃO DO MANGANÊS NOS SEUS MINÉRIOS

ENG. HERCULANO DE CARVALHO
Prof.º do I.S.T
Publicado na Técnica n.º 140 de Julho de 1943

Estas notas referem-se apenas à análise de *minérios portugueses vulgares,* contendo a maior parte do elemento no estado de MnO_2.

Desejou fazer-se a comparação entre os resultados que se obtêm pelo método volumétrico do ácido oxálico (denominado "usual" por Low [1]) e o método ponderal pelo fosfato, que se considerou como padrão. Paralelamente fêz-se quási sempre a determinação do manganês no estado de SMn.

Não se estudou o método volumétrico de Volhard, a-pesar-de correntemente ser usado nos laboratórios, porque o de Low se pode considerar um aperfeiçoamento dêle.

— Há anos já que no Laboratório de Química Analítica do I.S.T. se pratica e se ensina a determinação volumétrica de Mn pelo ácido oxálico, depois de se ter chegado à conclusão da sua precisão e reprodutibilidade em ensaios comparativos análogos aos que vamos citar.

Mas algumas discrepâncias ùltimamente notadas entre os nossos resultados e os de outros laboratórios levaram-nos a examinar novamente o assunto.

A técnica descrita por Low, quando executada com pouco cuidado, pode conduzir a resultados altos, mas as probabilidades de encontrar valores baixos são, pelo contrário, pequenas.

Como se indicava que os nossos números eram geralmente inferiores, não se via, "à priori", para o facto justificação.

Os resultados dos novos ensaios confirmam não haver razão para duvidar do método.

As diferenças reais que por vezes se notam têm a sua razão de ser na existência de quantidades, por vezes apreciáveis, de níquel e zinco (mais raro). Mas estas diferenças atenuam-se quando, no método do fosfato, se faz a eliminação prévia daqueles elementos. Quanto ao cobalto (que existe sempre *em pequena quantidade,* nos minérios portugueses) êle interfere igualmente no método de Low, sucedendo o mesmo com o chumbo, se não houver a precaução de o eliminar pelo anião $Cr_2O_7^=$, no decorrer da análise.

Descrição do método de Low [2] — Pesam-se 0,5g de minério finamente pulverizado e atacam-se, em pequeno copo coberto, com 10ml de ácido clorídrico concentrado. Aquece-se na chapa do banha-maria até ataque completo. Deixa-se arrefecer, junta-se 8-10ml de ácido sulfúrico 1:1 e leva-se a

---

[1] Low — Technical Methods of Ore Analysis, pág. 142 da 10.ª edição.
[2] A técnica descrita por Low foi levemente modificada por nós.

banho de areia até quási à secura. Deixa-se arrefecer, trata-se por 100 ml de água e aquece-se um pouco para dissolver os sais.

Se o resíduo fôr branco ou muito levemente corado (SiO_2 , SO_4Ba , TiO_2) continua-se como se segue; caso contrário, filtra-se, lava-se bem, calcina-se o resíduo, aquece-se com FH + gotas de SO_4H_2 , calcina-se, fundindo o resíduo, se o houver, com um pouco de CO_3Na_2 , retoma-se por água, adiciona-se leve excesso de ácido sulfúrico diluído e junta-se ao filtrado anterior.

— Aquece-se então à fervura, retira-se da chama e junta-se 1-2g de OZn puro em suspensão na água, agitando, aquece-se novamente e adiciona-se mais OZn até precipitação completa do ferro o que se reconhece pela aglomeração perfeita do precipitado e ainda pela deposição de óxido de zinco *branco* no fundo do copo, quando o reagente é adicionado. Ferve-se[3] e filtra-se então para copo de 600ml, lavando 10 vezes com água quente.

(No filtro fica todo o ferro que, depois de dissolvido em ácido clorídrico se pode dosear volumètricamente).

Ao filtrado adiciona-se então 3-4g de acetato de sódio e 30-40ml de solução saturada de bromo. Aquecer à fervura e deixar a banho-maria cêrca de 2 horas. (É necessário assegurarmo-nos de que a água de bromo foi em quantidade suficiente, o que se reconhece pela côr amarela ou avermelhada de líquido sobrenadante quando o precipitado assenta e, a princípio, por persistirem vapores de bromo acima da solução).

— Filtra-se então o líquido ainda quente, com o auxílio de leve sucção, através de cadinho-filtro Schott G 3, lavando 10 vezes com água quente e não nos importando com a película de óxido aderente ao copo e à vareta, que será apenas lavada e não arrastada para o filtro.

— O cadinho-filtro é então *bem limpo exteriormente* e transferido com o precipitado para dentro do copo que serviu à precipitação.

— Adiciona-se pequeno excesso de solução de $C_2O_4H_2.2OH_2.N/_5$ [4] e 50ml de ácido sulfúrico 1:9. Tapa-se o copo com vidro de relógio e aquece-se próximo da fervura, agitando freqüentemente, prolongando o aquecimento até já não haver partículas escuras em suspensão ou aderentes ao copo ou filtro.

Diluir então até cêrca de 200ml com água quente e aquecer ou arrefecer até à temperatura de 60-70°. Titular com $MnO_4K.N/_{10}$ até côr rósea leve. Se fôr n o número de mililitros da solução $N/_5$ de ácido oxálico que empregámos e n' o volume da solução $N/_{10}$ de permanganato, teremos

$$\text{Mn}\,\% = 0,2 \times \left(\text{n} - \frac{\text{n}'}{2}\right) \times 5,493 =$$
$$= 1,0986\left(\text{n} - \frac{\text{n}'}{2}\right)$$

Observações — *a*) A experiência tem-nos mostrado que o ataque ácido descrito é suficiente para a dissolução total de Mn nos minérios portugueses. Apenas certos minérios com elevada percentagem de Fe[5] deixam apreciável resíduo mas êste é constituído essencialmente por óxidos de ferro.

---

[3] Desconfiando-se da presença do chumbo, deve juntar-se, antes de levar à fervura, 2ml de solução saturada de $Cr_2O_7K_2$.

[4] Também pode usar-se solução do ác. oxálico de titulo tal que 1 ml corresponda a 1% de Mn, tendo em atenção que se partiu de 0,5 g.

[5] Tais amostras vieram para o Laboratório com a designação de "minérios mixtos".

O ataque presta-se para a dosagem de sílica, quando esta é pedida, visto a insolubilização em meio sulfúrico ser muito boa e até usualmente empregada, por exemplo, para o doseamento do silício nos produtos siderúrgicos. A sílica assim obtida é ordinàriamente branca e não deixa resíduo còrado pelo tratamento com FH.

Num caso, suspeito, em que fizemos a fusão dêste resíduo, recuperámos menos de 0,01% de Mn.

b) Também no decorrer do método se pode dosear o ferro, como se disse, no precipitado formado pelo OZn. Quere dizer que o método se presta a realizar com a maior economia de tempo as três determinações correntes nos minérios de manganês: Mn, SiO_2, Fe.

Para os doseamentos de Al e P, que algumas vezes se exigem, haverá então de fazer determinações àparte.

c) A separação pelo óxido de zinco é muito boa.

No final, isto é, com Fe^{+++} e Al^{+++} já precipitados, encontra-se, segundo o que verificámos, um valor de pH vizinho de 6,3 (líquido já frio). A adição de $C_2H_3O_2Na$ leva êste valor a 6,5-6,6 mas, segundo faz notar Low, o papel do acetato é o de neutralizar algum BrH:

$$C_2H_3O_2^- + Br^- + H^+ \rightarrow C_2H_4O_2 + Br^-,$$

não havendo, nestas condições, formação de Br_2Mn.

d) É importante conservar excesso de $C_2O_4H_2$ durante a dissolução de MnO_2. Verificando-se que pela agitação
se começa a formar leve tonalidade roxa, deve adicionar-se logo mais 1-2ml da sol. de ác. oxálico.

Fazendo-se o ensaio em duplicado, como é de rigor, uma das tomas servirá como orientadora da segunda, à qual se juntará, de uma vez, o volume de solução de ác. oxálico encontrado para a primeira, mais 2-3ml. Com a prática, a apreciação do volume de precipitado de $MnO_2.nOH_2$ dá-nos logo a ordem de grandeza do volume de solução redutora a adicionar.

e) Como é óbvio, na lavagem do precipitado no cadinho-filtro, antes de proceder à sua dissolução e redução, deve conseguir-se a eliminação total do bromo em excesso. A prática mostra que as 10 lavagens indicadas são suficientes para isso.

f) As reacções-base do processo de titulação, são as seguintes:

1) $$C_2O_4^= + MnO_2 + 4H^+ \rightarrow Mn^{++} + 2CO_2 + 2OH_2$$

2) $$5C_2O_4^= + 2MnO_4 + 16H^+ \rightarrow 2Mn^{++} + 10CO_2 + 8OH_2$$

Portanto: $1ml\ C_2O_4H_2.2OH_2\ {}^{M}/_{10} = 1ml\ N/_5 = 5{,}493\ mg\ de\ Mn$.

As mesmas reacções podem servir de base ao doseamento só de MnO_2 do minério, trabalhando directamente sôbre uma toma bem pulverizada e em presença de concentração mais elevada de SO_4H_2.

g) Como já se fêz notar, se existir cobalto, êste elemento comporta-se no processo como o manganês. Pelo contrário o hidróxido de Ni^{+++} não precipita nas condições referidas.

Método de precipitação no estado de $P_2O_7Mn_2$ — Êste método que pode considerar-se como "padrão", vem descrito com suficiente pormenor em qualquer bom tratado de análise química.

Para as separações prévias seguimos duas técnicas que, dado os teores quási sempre baixos de Zn, Ni e Co dos nossos minérios de manganês e a

ausência de Pb, nos deram resultados pràticamente equivalentes. Resumimo-las a seguir.

A) — Depois do ataque do minério, insolubiliza-se SiO_2, filtra-se e leva-se a solução no SH_2 para precipitar os grupos II e III.

— No filtrando faz-se a separação entre os catiões divalentes e trivalentes dos grupos V e VI [6], pelo acetato.

— O líquido filtrado, contendo Mn, Ni, Co, Zn e os catiões dos grupos VII e VIII, é levado a SH_2, depois de acertar convenientemente o pH para que só precipitem os sulfuretos de Zn, Ni, e Co.

O filtrado trata-se agora por $OH\,NH_4 + S(NH_4)_2$, separando assim Mn dos metais dos grupos VII e VIII.

O precipitado de SMn dissolve-se em SO_4H_2, ferve-se para expulsar SH_2, e procede-se a precipitação com PO_4HNa_2.

B) — Sôbre a solução resultante do ataque e sem filtrar mesmo SiO_2 procede-se à separação pelo acetato.

— No líquido filtrado precipitam-se Mn, Ni, Co e Zn pelo $S(NH_4)_2 + OH\,Am$. Filtra-se e lava-se.

— Dissolvem-se então os sulfuretos em *ac. sulfúrico 1:9;* desta forma permanecem insolúveis na quási totalidade os sulfuretos de Ni e Co.

— No líquido filtrado faz-se agora a precipitação pelo $PO_4H^{=}$.

— Como a dosagem de pequenas quantidades de manganês se faz ràpidamente e com precisão pelo método colorimétrico escolhendo como oxidante o periodato, fizemos a recuperação de todo o Mn, em qualquer das técnicas, nos vários resíduos das separações (sôbre tudo na do acetato) e no líquido filtrado do PO_4NH_4Mn.

Encontrámos neste último um teor correspondente a 0,02% de Mn o que vem confirmar a excelência do método. Nos resíduos encontrámos, ao todo, quantidade que não excedia 0,1%.

À mesma ordem de grandeza corresponde o teor de Mn encontrado no precipitado de hidróxidos do método volumétrico de Low obtido com a adição de OZn.

Precipitacão e dosagem no estado de SMn — O método não é muito de aconselhar mas praticámo-lo algumas vezes pois ainda é usado em alguns laboratórios e, quando conduzido com os devidos cuidados, dá resultados aceitáveis. Também o não descrevemos em pormenor, por ser conhecido.

A principal dificuldade reside na transformação *integral* do SMn mais ou menos oxidado em SMn puro. Muitas vezes tem de repetir-se a calcinação (com S e em atmosfera de H_2) para eliminar completamente os pontos acastanhados que ainda se notam.

Em resumo, a técnica é a mesma que se descreveu em B) no método do fosfato até se obter o precipitado de SMn.

Êste dissolve-se então em ClH 1:1 [7] e reprecipita-se por $OH\,NH_4 + S(NH_4)_2$. Filtra-se, lava-se 3 vezes e procede-se à calcinação em cadinho de Rose.

Comparação dos resultados — No quadro a seguir indicam-se os resultados da análise de 12 amostras diferentes e de várias proveniências. Na 1.ª

---

[6] As designações dos grupos correspondem ao método geral de separações dos catiões de Carnot, modificado por Lepierre.

[7] Utilizámos propositadamente concentração elevada de ácido para que a interferência de Zn, Co e Ni nos desse idéia do êrro cometido.

coluna designam-se, por números, as amostras, *L* indica os resultados obtidos pelo método de Low, *P* e *S* os valores dados pelos métodos do fosfato e do sulfureto, respectivamente. Na coluna a seguir dão-se alguns números achados em outros laboratórios sôbre duas das amostras. Finalmente nas outras colunas indicam-se as diferenças entre os valores obtidos com *L* e *P* e fazem-se algumas observações.

Vê-se que em 8 das amostras analisadas os afastamentos em relação ao método padrão são muito pequenos. Nas amostras 2 e 3 há êrro apreciável por excesso, ao passo que em 11 e 12 o desvio, da mesma ordem de grandeza (0,6%), é por defeito.

E possível que tenha havido em parte influência da amostragem ou (no caso de 11 e 12) interferência do Ni e Zn no método do fosfato, visto a separação não ser muito eficiente, como já se disse.

Valores em Mn% (nos minérios secos a 100º) [8]

N.º	L	P	S	Outros laboratórios	Δ	Observações
1	50,33	50,52	50,51	49,32 50,08	-0,19	
2	47,80	47,15	48,77	48,16 48,25 47,88	+0,65	- O valor 47,88, foi achado em Laboratório estrangeiro
3	30,87	30,36	60,45	—	+0,51	
4	3,95	3,97	4,48	—	-0,02	- Com apreciável quantidade de Ni
5	41,60	41,62	41,44	—	-0,02	
6	32,46	32,69	33,44	—	-0,23	
7	39,58	39,41	39,11	—	+0,17	
8	26,56	26,66	27,01	—	+0,10	- Com 0,25% de Ni
9	18,04	18,08	—	—	-0,04	
10	34,94	35,12	—	—	-0,28	
11	35,04	35,59	—	—	-0,54	- Tinham quantidades apreciáveis de Zn, Ni e Co
12	32,96	33,64	34,42	—	-0,68	

No entretanto aqueles afastamentos não excedem o que é vulgar encontrar-se entre resultados de laboratórios diferentes.

Vê-se também que a interferência de Zn, Ni e Co, no método do sulfureto, conduzido segundo a técnica indicada, é nítida, como era de prever [9].

Em resumo pode afirmar-se que êste trabalho confirma a nossa anterior convicção de que *o método de Low é de aconselhar na análise corrente dos nossos minérios de manganês.*

E chama-se a atenção para o facto dêstes minérios apresentarem vulgarmente teores de umidade da ordem de 4-5% o que não torna lícita, sem o conhecimento dêsse teor, a comparacão dos números obtidos em análises sôbre o minério "tal qual", com os valores referentes a "minério sêco a 100º".

---

[8] As análises foram efectuadas com a colaboração do Chefe de trabalhos do I.S.T., Abel de Carvalho e do auxiliar Sebastião Pereira.

[9] É necessário não exagerar a importância desta interferência que, como já se disse, é em geral de reduzida ordem de grandeza.

novageo

Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Lda.

Sistemas de Informação Geográfica

Consultores e Técnicos Especializados
Desenvolvimento de Software
Formação

INTERGRAPH SOLUTIONS CENTER

Sede
TagusPark,Parque de Ciência e Tecnologia
Núcleo Central nº 237 - 2780 OEIRAS
Tel. (01) 421 32 62 Fax. (01) 421 39 29

Delegação Norte
Av.Vila Garcia de Arosa,
1470 - 6º dto. 4450 MATOSINHOS
Tel.-Fax. (02) 938 48 68

MicroStation

BENTLEY

QUALIDADE

NO VIDRO CIENTÍFICO
UM MUNDO QUE A NORMAX OFERECE
TOTALMENTE DEDICADO A SI

EMPRESA CERTIFICADA

CERTIFICADO
N. 95 / CEP. 295
EMITIDO PELO
INSTITUTO
PORTUGUÊS DA
QUALIDADE

A fabricar e transformar vidro científico para a
SAÚDE - ENSINO - INVESTIGAÇÃO - CONTROLO

A Normax encontra-se agora Certificada pelo Instituto Português da Qualidade, de acordo com a Norma Internacional NP EN ISO 9002.

É mais um orgulho para a Normax e seus colaboradores com o resultado obtido na melhoria continua nos processos de fabrico e na sua organização.

Mais um passo importante e de garantia da QUALIDADE NORMAX, no fabrico e comercialização de vidro científico.

NORMAX
fábrica de vidros científicos, limitada

Rua Santa Isabel, 17 – Apartado 23 – Telefs. (044) 551 381 / 3 / 97 – Telefax 552 216
2431 MARINHA GRANDE Codex – PORTUGAL

Com o apoio do PEDIP II

NOVO MÉTODO DE CÁLCULO E ACÊRTO DOS DIAGRAMAS NO PROJECTO DAS TURBINAS MIXTAS (FRANCIS)

ENG. MANUEL P.R. DA COSTA DE BARROS
1.º Assistente do I.S.T
Publicado na Técnica n.º 45 de Julho de 1932

Ao publicar êste trabalho, não temos a pretensão de apresentar ideias novas sôbre a teoria das turbinas.

Dentro dos princípios da teoria clássica, e modificando a forma de relacionar as conclusões dêsses princípios, chegamos a uma orientação de cálculo, por meio da qual se dá solução rápida e segura ao problema do estudo e acêrto dos diagramas que traduzem e permitem prever as condições de funcionamento dêste género de máquinas.

No estudo duma turbina, qualquer que seja o seu tipo, deve atender-se, logo de início, à necessidade de impôr as condições mais favoráveis ao escoamento da água na região de saída da roda, em virtude da influência decisiva que o modo como a corrente é conduzida, ao abandonar os canais, exerce sôbre o rendimento hidráulico da turbina.

Êsse estudo, quando se trata dos modernos sistemas de rodas mixtas e derivados, baseia-se no dos casos hipotéticos de turbinas elementares semelhantes, em que a altura dos canais, por muito pequena, permite atribuir a mesma velocidade periférica e as mesmas condições de escoamento a todos os pontos da aresta de saída das pás e correspondentes filêtes de água.

Mas, antes de considerar a turbina hipotética de configuração semelhante à dos casos riais, imagine-se o exemplo mais simples duma roda elementar constituída por canais, cujas linhas médias pertencem à superfície dum cone de vértice no eixo da turbina, *fig. 1, a.*

Neste caso, para obter a forma dos canais da roda, basta tratar o problema do traçado das pás que os limitam, sôbre o sector plano que resulta do desenvolvimento do referido cone: as extremidades dos perfís das pás tomam nêsse traçado, a orientação definida pelos mesmos ângulos β_1 e β_2 que as velocidades relativas W_1 e W_2 da água para com a roda, à entrada e à saída, formam com a direcção comum das velocidades periféricas u_1 e u_2 no diagrama, prèviamente estabelecido, *fig. 2.*

Com esta representação de grandezas, fica estabelecida a convenção de referir os índices 1 e 2, que tanto afectam os vectores que representam as velocidades como os ângulos que êles formam entre si, respectivamente, à secção de entrada e de saída do órgão móvel; a velocidade absoluta da água C, resultante das anteriores, será, portanto, para essas regiões, $C_1(W_1,u_1)$ e $C_2(W_2,u_2)$ — e α_1 e α_2 os respectivos ângulos de inclinação sôbre a direcção periférica.

Convenciona-se, finalmente, referir o índice *o* à saída do distribuidor.

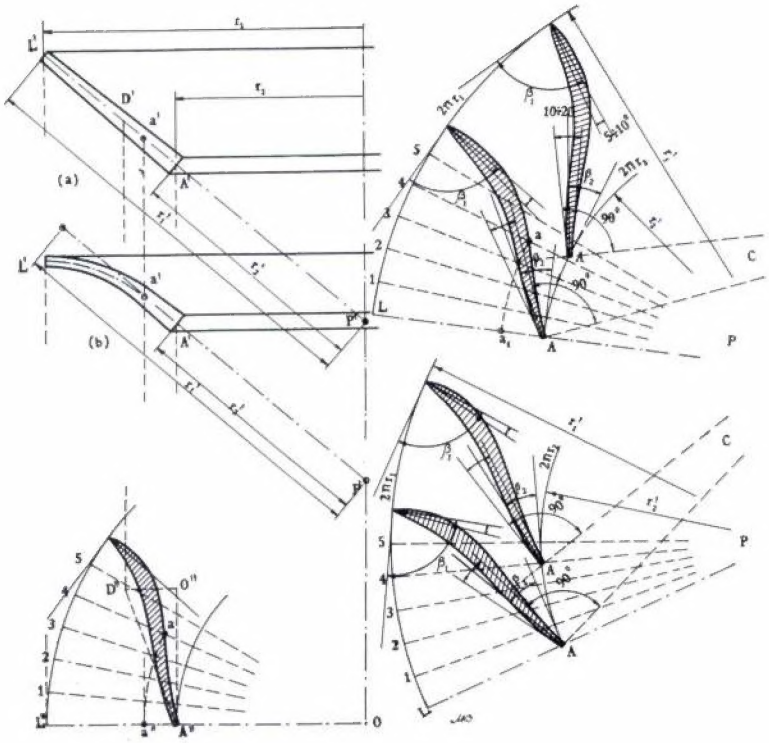


Fig. 1

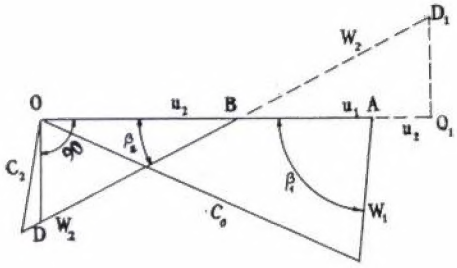


Fig. 2

A projecção em planta, que constituirá, posteriormente, a base de todo o trabalho de execução, e na qual se condensa, portanto, a finalidade de todo o projecto, obtém-se combinando em seguida os perfís assim estudados no desenvolvimento, com a representação das pás no alçado, mediante a seguinte regra de simples geometria descritiva:

"Os comprimentos que no desenvolvimento se medem no sentido radial e no sentido circular, conservam o seu valor, respectivamente, no alçado e na planta" — regra que se pode ver aplicada na figura.

Se, porém, na roda elementar, as moléculas de água se deslocam sôbre uma superfície de revolução de geratriz curva, *fig. 1, b*, como essa superfície já não é planificável, resolve-se o problema, substituindo o perfil das pás por linhas tanto quanto possível iguais, pertencendo por elementos sucessivos a superfícies cónicas de vértice no eixo da turbina, e tangentes aos filêtes médios em pontos escalonados da saída para a entrada da roda.

Em geral, bastam dois pontos nas regiões extremas. Para não alongar estas considerações, acrescente-se apenas a tal respeito, que no caso duma turbina elementar caracterizadamente mixta, o cone relativo ao ponto de montante se confunde com um plano transversal, sendo então suficiente, para obter a planta, conjugar directamente a representação no plano desta com

um desenvolvimento apenas — o do cone tangente às linhas médias na região da saída.

Nos casos derivados do sistema mixto, também, por via de regra, se procede do mesmo modo, mas agora devido a que as linhas médias, pela sua reduzida extensão e suave curvatura, permitem uma representação suficientemente aproximada na planificação do referido cone.

Quando se trata dos casos riais, corrigem-se depois as projecções das linhas médias, recorrendo a cortes auxiliares, efectuados nas superfícies das pás por planos axiais e transversais.

Mas antes de entrar no estudo dêsses casos, é conveniente apresentar ainda algumas notas acêrca da constituição especial dos vários tipos de rodas e da mútua correspondência de forma que entre êles existe.

O sistema Francis, em que a entrada da água na roda se faz por planos normais ao veio e a saída é sensìvelmente axial, compreende, como se sabe, os tipos de turbina estreita ou de marcha lenta, de turbina normal e de turbina larga ou de marcha rápida, cujas rodas a *fig. 3* refere ao mesmo diâmetro D_s da secção de saída, com o fim de mostrar mais claramente a variação relativa do diâmetro D_1 das arestas de entrada, que caracteriza êsses três tipos.

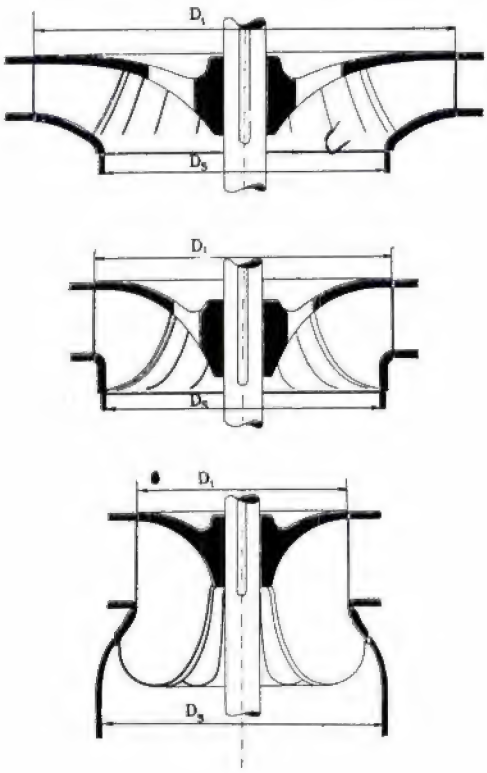


Fig. 3

Esta evolução de forma, imposta pela necessidade de aumentar o número *(n)* de rotações, tornando a turbina aplicável aos casos práticos de alturas de queda *(H)* sucessivamente mais reduzidas e caudais *(Q)* mais abundantes, obedece às indicações das fórmulas gerais

$$Q = \frac{\pi D_s^2}{4} C_s \sqrt{2gH}$$

$$\pi D_1 n = 60 u_1 \sqrt{2gH}$$

em que C_s representa o valor específico médio e meridiano (projecção sôbre um plano axial) da velocidade absoluta da corrente à saida da roda.

Posteriormente — mas fora já do sistema caracterizadamente mixto, no qual as arestas de entrada são sempre paralelas ao veio — a evolução continuou, fazendo intervir modificações mais radicais, como meio de dar solução apropriada ao problema, cada vez mais instante, de aproveitar as baixas quedas que já não comportam, por insuficiente, a própria turbina Francis larga.

Mas desta vez, a diminuição do diâmetro D_1, requerida pelo aumento do número de rotações, só se pôde conseguir inclinando aquelas arestas, por efeito de cortes oblíquos e sucessivamente mais reentrantes, efectuados nas pás, a partir da periferia, e prescindindo ao mesmo tempo de uma condução exactíssima da água no trajecto através dos canais. Da turbina Francis larga deriva, dêste modo, o tipo das chamadas turbinas mixtas de transição, que confinam, num grau imediato da escala evolutiva, com a turbina hélico-mixta, do sistema Dubs, na qual se nota já uma flagrante analogia de forma entre as arestas de entrada e as arestas de saida, *fig. 4.*

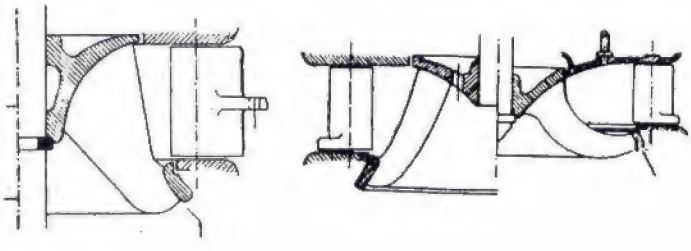


Fig. 4

Para as primeiras destas arestas passou a ser necessário considerar, do mesmo modo que para as segundas, um diâmetro médio D_{1m}, cuja determinação dificulta o estudo da roda, e no cálculo, à medida que se ia perdendo a condução forçada, teve que pôr-se de lado a pretensão de basear êsse estudo exclusivamente sôbre a teoria, para fazer intervir dados obtidos por ensaios com rodas modêlos.

No prosseguimento da evolução das turbinas, diga-se ainda, efectuado sempre no sentido de obter velocidades crescentes e uma perfeita adaptação do modo de funcionamento das rodas às exigências das mínimas quedas e máximos caudais, chega-se por fim aos tipos mais modernos de rodas de pás em hélice e de rodas Kaplan (hélices móveis), que pertencem já a uma categoria diferente da dos casos anteriores: à categoria das turbinas axiais, tornadas dêste modo hélico-axiais.

O movimento das partículas de água através da roda faz-se segundo hélices cilíndricas, ficando as arestas de entrada e de saída situadas, aproximadamente, em planos normais ao veio, *fig. 5 e 6.*

Fig. 5

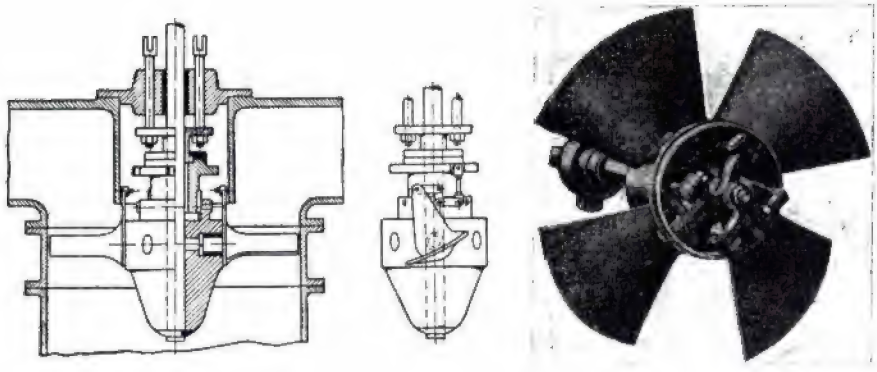


Fig. 6

Reedita-se assim, de certo modo, uma categoria antiga de turbinas, mas nesta reedição, que apenas diz respeito à direcção geral da corrente, surgem concepções inteiramente novas, como a que põe por completo de parte o antigo conceito da condução forçada da água através dos canais da roda.

A vantagem desta importante transformação salta à vista, lembrando que naquela condução, as velocidades relativas, tanto de entrada como de saída, originadas pela elevada velocidade tangencial específica a que deu lugar a redução do diâmetro das arestas de entrada, provocam perdas por atrito tão consideráveis que o rendimento hidráulico diminui notàvelmente.

Êste inconveniente remedeia-se diminuindo o perímetro molhado dos canais, e para o conseguir empregam-se poucas pás de pequena extensão, que em seguida se trabalham a fim de alisar as suas superfícies. É o que se verifica nas turbinas hélico-axiais.

O carácter celular desaparece, e as pás deixam já de constituír paredes de canais, para formarem simples superfícies de desvio no movimento da água que circula pelo espaço da roda.

Na constituição desta pode entrar um número mínimo de duas pás, semelhantes, no aspecto, às pás do aeroplano.

Mas a semelhança entre os dois propulsores não é simplesmente de aspecto: vai mais longe, devido a que as leis aérodinâmicas da acção duma corrente de ar sôbre uma superfície que a desvia podem aplicar-se aos casos análogos da hidrodinâmica.

Com a criação dêstes sistemas, por sinal muito recente, conseguiu-se o último têrmo duma larga escala, cuja interessante evolução dificilmente encontrará similar no desenvolvimento de qualquer outra máquina motôra. Mas entenda-se: quando se diz último têrmo, não se quer de modo algum significar que a evolução não continue; pretende-se pôr em evidência que essa escala, que abrange no extrêmo oposto a Roda Pelton, só depois da realização de Kaplan ficou devidamente completa, como conjunto de sistemas inteiramente apto a promover tôda a sorte de aproveitamentos, sejam quais fôrem as suas condições: — quer se trate de alturas de muitas centenas ou de simples fracções de metro.

No estado dos casos verdadeiros, a altura dos canais à entrada do órgão móvel, tem como consequência dar às arestas de saída um desenvolvimento radial que já não permite considerar, como nos casos hipotéticos anteriormente apresentados, as mesmas condições de escoamento para os diferentes filêtes de água que atravessam a roda.

Mas recorrendo a êsses casos, é possível resolver o problema. Considera-se a turbina que se pretende estudar, dividida em turbinas elementares de

altura de canais tão reduzida, que permita considerar a mesma velocidade periférica e as mesmas condições de escoamento em todos os pontos da aresta de saída de cada uma delas.

Substitui-se por esta forma à turbina dada, uma série de turbinas parciais que tornam possível o estudo daquela, pela aplicação dos mesmos processos apresentados para os casos hipotéticos.

Mas nessa divisão, para que a marcha da corrente se não altere, é necessário que as geratrizes das superfícies de revolução que a efectuam, se confundam com projecções circulares de filêtes de água, como se pode vêr na *fig. 10*, que representa uma roda em meio-corte axial, com as pás em projecção circular, na qual se traçaram as linhas $I_{1,2}$ e $I_{2,3}$ como geratrizes de superfícies que neste caso constituem três turbinas parciais hipotéticas.

O fraccionamento em turbinas elementares, não oferecendo dificuldades à entrada da roda, no caso do sistema Francis [1] que particularmente se considera, é bastante trabalhoso ao longo da aresta de saída, por ser variável ao longo desta aresta a velocidade periférica da roda: — o que, junto a imposições de ordem construtiva, tendentes a igualar tanto quanto possível a largura dos canais, determina a variação simultânea da velocidade meridiana de escoamento da água que intervém na determinação dos caudais parciais, obrigados, no seu conjunto, a perfazer, rigorosamente, o caudal do problema.

É acêrca dos diagramas, de cujo estudo depende essa determinação, que pretendemos fazer agora mais detalhadas considerações.

Diagramas parciais. Ponto médio e diagramas médios de saída para os vários caudais que atravessam a roda.

Devido ao desenvolvimento radial das pás, sucede que para cada um dos caudais a escoar pela turbina, conforme o regime de carga, há tantos diagramas de saída — ou *diagramas parciais* — quantos os pontos da aresta de juzante das pás. *fig. 7*;

por outro lado, para cada um dêsses pontos, contam-se os diagramas de saída pelo número de caudais que têm por limite o caudal máximo da turbina, *fig. 8*.

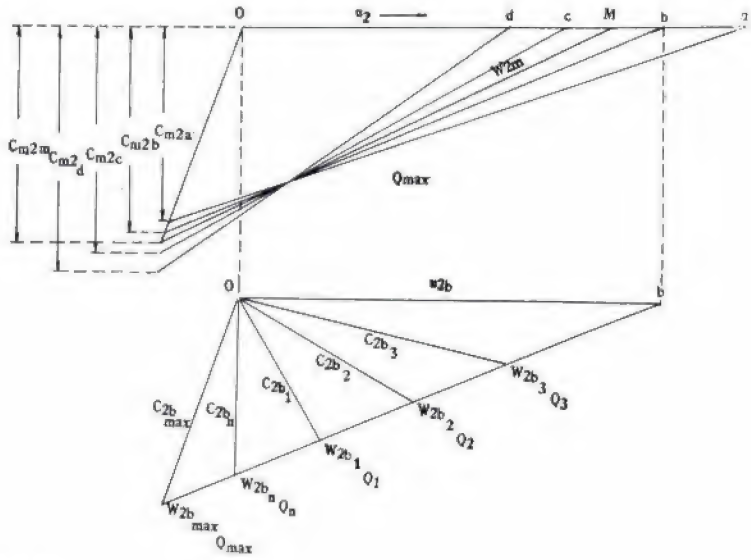


Fig. 7 e 8

[1] Nos casos derivados do sistema Francis aplica-se igualmente o que se segue às arestas de entrada.

Ora, como para estudar devidamente a roda, não é admissível que se exclua dêsse estudo a variação dos débitos, imposta pela condição de dar à turbina a regulação indispensável, remove-se a dificuldade que provém daquela dupla variação, fazendo corresponder a cada caudal um só diagrama, que será o *diagrama médio de saída* para o caudal considerado.

Êstes diagramas dizem respeito, necessàriamente, a um ponto da aresta de juzante das pás, a que se convenciona chamar *ponto médio* e que se representa pela letra *M*.

Às convenções anteriores, acrescenta-se agora a de afectar o índice dos valores médios com a letra *m*, escrita depois do número 2, que representa, segundo aquelas convenções, a saída da roda [2].

Mas, para que seja possível substituir os diagramas parciais por um diagrama único, sem alterar o escoamento, é necessário que o caudal que se considera não varie quando se substituem as velocidades absolutas meridianas de saída C_{m2a}, C_{m2b} ... correspondentes a vários pontos distribuídos ao longo de tôda a aresta, pela velocidade absoluta meridiana C_{m2m}, correspondente ao ponto *M*, *fig. 9*.

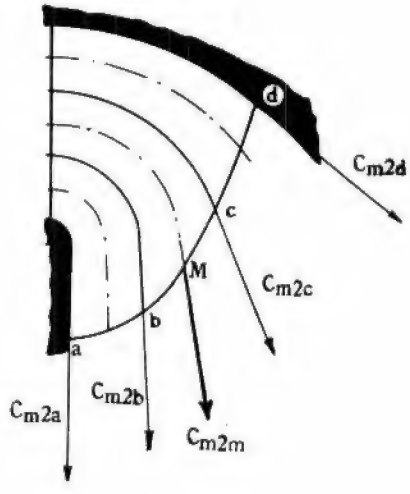


Fig. 9

É o que se traduz, analìticamente, pela expressão

$$\sum \pi D_{2xy} b_{2xy} C_{m2xy} \sqrt{2gH} \frac{t_2 - \Delta_2}{t_2} = \tag{1}$$

$$= C_{m2m} \sum \pi D_{2xy} b_{2xy} \sqrt{2gH} \frac{t_2 - \Delta_2}{t_2}$$

em que x e y representam os pontos de intersecção da aresta de saída com as linhas que no alçado limitam as sucessivas turbinas parciais, e que no exemplo considerado, *fig. 10*, são sucessivamente os pontos *a* e *b*, *b* e *c* e *c* e *d*.

Os diâmetros D_{2x} e D_{2y} das circunferências percorridas pelos pontos *x* e *y*, que dão por semi-soma o factor D_{2xy}, medem-se no desenho, efectuado como esbôço, bem como a largura b_{2xy}, que se toma, em cada turbina parcial, perpendicularmente ao respectivo filête médio, para o qual se adopta, com suficiente grau de rigor, a velocidade absoluta meridiana $C_{m2xy} = \frac{C_{m2x} + C_{m2y}}{2}$.

---

[2] Os sistemas derivados da roda Francis têm também um ponto médio nas arestas de entrada, em cujos índices se acrescenta a letra *m* ao número *1*.

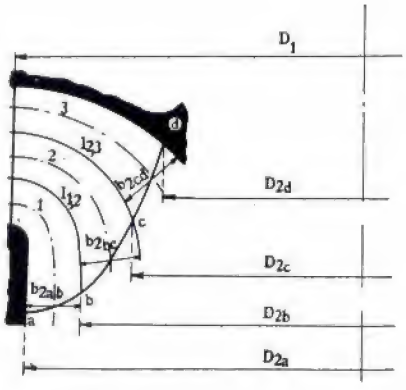


Fig. 10

Finalmente, o factor de correcção, que traduz a influência da espessura terminal das pás Δ_2 sôbre a área das secções de passagem da água, fixa-se entre os limites fornecidos pela experiência, sendo em geral

$$\frac{t_2}{t_2 - \Delta_2} = 1{,}07 - 1{,}3$$

O problema pôsto por esta forma, permite determinar a grandeza definitiva dum primeiro elemento para a construção dos diagramas.

Com efeito, para cada caudal, fica a roda obrigada, tal como foi esboçada no alçado, a certas velocidades meridianas ao longo da aresta de saída, e, portanto, a um certo valor médio das mesmas velocidades.

Como o caudal máximo é dado, ou se deduz do que é proposto, bastará então aplicar a expressão:

$$Q_{\max} = C_{m2m_{\max}} \Sigma \pi D_{2xy} b_{2xy} \sqrt{2gH} \frac{t_2 - \Delta_2}{t_2} \quad [3] \qquad (2)$$

[3] Esta expressão atende à verdadeira relação de grandeza que existe, em qualquer caso da prática, entre $C_{m2m_{\max}}$ e C_s.

Deve observar-se, a êste respeito, que não é exacto o critério dos autores que tratam o assunto quando escrevem simplesmente, para todos os casos:

$$C_{m2m_{\max}} = C_s \frac{t_2}{t_2 - \Delta_2}$$

visto que deixam de atender à diferença que possa existir entre a secção da roda à saida dos canais e a secção de entrada do difusor independentemente da influência da espessura terminal das pás.

Por efeito dessa diferenca, como único factor em jôgo, seria em virtude da lei da continuidade:

$$C_{m2m_{\max}} = C_s \frac{\frac{\pi D_s^2}{4}}{\Sigma \pi D_{2xy} b_{2xy}}$$

e, portanto, no caso real

$$C_{m2m_{\max}} = C_s \frac{\frac{\pi D_s^2}{4}}{\Sigma \pi D_{2xy} b_{2xy}} \cdot \frac{t_2}{t_2 - \Delta_2}$$

donde a relação 2, visto ser $Q_{\max} = C_s \frac{\pi D_s^2}{4} \sqrt{2gH}$.

para se ficar conhecendo a grandeza de $C_{m2m_{max}}$ — valor médio da velocidade absoluta meridiana de saída para o referido caudal.

Uma tal orientação de cálculo admite, como possível, qualquer alçado satisfatòriamente estabelecido em esboço, de harmonia com as dimensões gerais da roda, e aplica-se a todos os tipos de turbinas.

Importa, todavia, que o alçado definitivo conduza ao melhor valor do rendimento hidráulico: $\eta_h = 1 - C_2^2 - C_r^2 - W_s^2$, em que C_2 representa a velocidade absoluta de saída, W_s a velocidade de choque dos filêtes de água à entrada da roda e C_r^2 a percentagem das restantes perdas hidráulicas.

Tratando-se de turbinas normais e mesmo das estreitas, *fig. 11*, leva-se a grandeza de $C_{m2m_{max}}$, assim calculada, a coincidir com o valor que se refere à secção de saída dos canais e que se obtêm por interpolação ao longo do filête médio (filete do ponto M) entre $C_{m0_{max}}$ e C_s, e em seguida alterado na relação de $\frac{t_2}{t_s - \Delta_s}$.

C_r^2

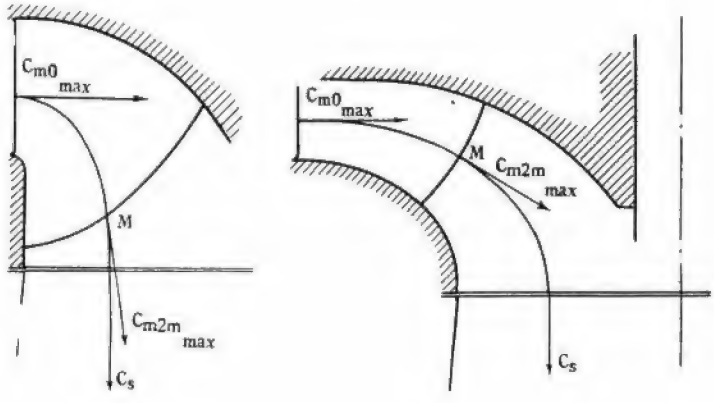


Fig. 11

Nas turbinas largas, *fig. 12*, não é possível evitar o estreitamento dos canais a que obriga a configuração própria da roda, e nêste caso, a velocidade meridiana aumenta desde $C_{m0_{max}}$ [4], para diminuir depois da secção mais reduzida até ao valor de C_s.

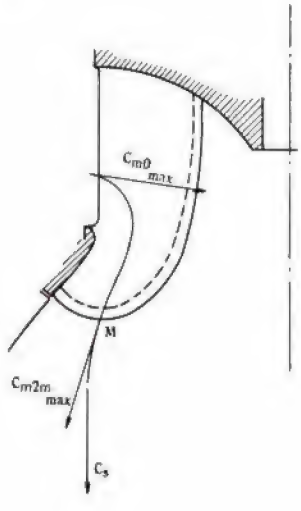


Fig. 12

[4] Pelas convenções adoptadas, $C_{m0_{max}}$ é a velocidade absoluta meridiana, à saída do distribïdor, para o caudal máximo.

Em geral, nestas turbinas, o primeiro esboço conduz a um valor de $C_{m2m_{max}}$ que não deixa de ser exagerado, mas que se poderá melhorar deslocando a aresta de saída para juzante, sem com isso pretender impôr a essa velocidade o valor $C_1 \frac{t_2}{t_2 - \Delta_2}$, como alguns autores preceituam.

É que êsse deslocamento, se por um lado favorece as condições de saída, agrava por outro, as perdas por atrito, e duma maneira sensível, visto que qualquer pequena variação meridiana da posição da aresta nêsse sentido, alonga consideràvelmente os percursos da água na região dos canais em que a velocidade relativa W atinge, precisamente, os maiores valores.

Quanto à direcção de $C_{2m_{max}}$ [5] é necessário atender, no critério que se adopte para a fixar, a que o mínimo de perdas à saída da roda se verifica para um α_2 compreendido entre 90° e 90º- β_2.

Se a turbina é especialmente destinada a trabalhar em carga máxima, dá-se àquele vector a direcção normal à recta dos *u u*.

Mas se, como mais vulgarmente sucede, a turbina tem de suportar sensíveis variações de carga, é necessário que ela possa manter um rendimento elevado numa zona relativamente extensa da regulação, e neste caso faz-se $\alpha_{2m_{max}} > 90^\circ$, e tanto maior quanto mais baixa fôr a carga habitual de serviço em relação à carga máxima.

Em geral: $\alpha_{2m_{max}} = 105 - 115^\circ$.

Com o valor arbitrado a êste ângulo fica definido o vector $C_{2m_{max}}$. Mas a partir dêste momento, só por tentativas é possível continuar o estudo do diagrama, em cuja constituição imediata, além do vector definitivo [6] que se acaba de determinar, entra a velocidade periférica u_{2m} do ponto *M*, de posição desconhecida, e o vector $W_{2m_{max}}$ — valor médio da velocidade relativa de saída para o caudal máximo.

Arbitra-se ao ponto médio uma primeira posição, podendo para isso recorrer-se à seguinte referência de valores

$D_{2m} \approx D_1$	turbinas estreitas
$D_{2m} \approx 3/4 D_1$	turbinas normais
$D_{2m} \approx 1/2 D_1$	turbinas largas, mixtas de transição e hélico-mixtas,

que se apresenta a título de simples indicação para o caso de uma aresta de saída bem localizada, e calcula-se a velocidade periférica dêsse ponto, na posição assim arbitrada, pela relação de proporcionalidade

$$u_{2m} = u_1 \frac{D_{2m}}{D_1}$$

em que u_1 e D_1 são conhecidos pelo cálculo das dimensões gerais da roda. Fecha-se em seguida o triângulo das velocidades (periférica, absoluta e relativa) com o vector $W_{2m_{max}}$, que só excepcionalmente será o verdadeiro.

---

[5] Valor médio da velocidade absoluta de saída para o caudal máximo, da qual $C_{m2m_{max}}$ é a projecção meridiana, ou num plano axial.

[6] Ressalva-se o caso de qualquer alteração imposta ainda à sua orientação pelo estudo gráfico da entrada da água na roda

Mas o ter-se definido êste vector em grandeza e direcção, permite verificar se realmente o diagrama obtido representa a média de todos os diagramas parciais para o caudal máximo.

É que êstes diagramas, cujo conhecimento é indispensável para poder proceder a essa verificação, têm uma construção possível, visto que definida para um caudal, uma velocidade relativa de saída, tôdas as restantes velocidades relativas para êsse caudal se podem determinar, tanto em grandeza como em direcção.

Em *grandeza*, com efeito, porque as condições de escoamento de dois filêtes de água quaisquer se relacionam entre si por um princípio geral das rodas mixtas que fàcilmente se deduz, aplicando a êsses dois filêtes *f'* e *f"*, *fig. 13*, a primeira equação fundamental da teoria das turbinas

$$W_2'^2 = W_1'^2 + C_p'^2 + u_2'^2 - u_1'^2$$

$$W_2''^2 = W_1''^2 + C_p''^2 + u_2''^2 - u_1''^2$$

em que C_p é o grau de reacção.[7]

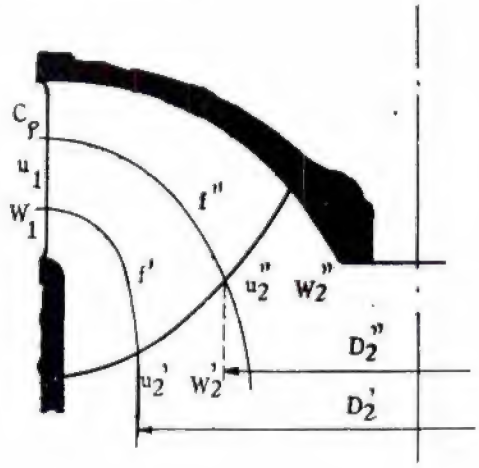


Fig. 13

Admitindo a mesma pressão e velocidade em todos os pontos do intervalo entre o distribuidor e a roda, e supondo que êste é atravessado pela água sob um ângulo constante e sem choques, isto é, que:

$$W_1' = W_1'' \qquad C_p' = C_p''$$

vem, visto ser ainda $u_1' = u_1''$:

$$W_2'^2 = W_2''^2 + u_2'^2 - u_2''^2$$

Quanto à *direcção* das velocidades relativas, deve atender-se a que a pá da turbina não deixe de apresentar faces contínuas e regulares depois de formada pela união das sucessivas fracções que correspondem às turbinas componentes.

Hidraulicamente, seria vantajoso obrigar os vértices dessas velocidades a coincidir com um ponto da vertical da origem do diagrama, para que dêste

---

[7] C_p^1 representa, portanto, a percentagem da altura total que, deduzidos os atritos, se encontra sob a forma de pressão no intervalo entre o distribuïdor e a roda.

modo a velocidade absoluta viesse a possuir a direcção axial e a mesma grandeza ao longo da aresta de saída.

Mas êste critério, que apenas beneficiaria um caudal, sem aproveitar aos restantes, prejudica a construção, por ocasionar um estreitamento progressivo e muito sensível dos canais para as regiões mais próximas do veio, facilitando as obstruções da roda por corpos estranhos.

Para evitar essa diminuição, desloca-se o ponto de convergência das velocidades relativas sôbre a linha de acção dos $W_{2m}W_{2m}$, para a direita, *fig. 14*, até à proximidade ou mesmo à coincidência com o pé da perpendicular baixada da origem do diagrama sôbre aquela linha.

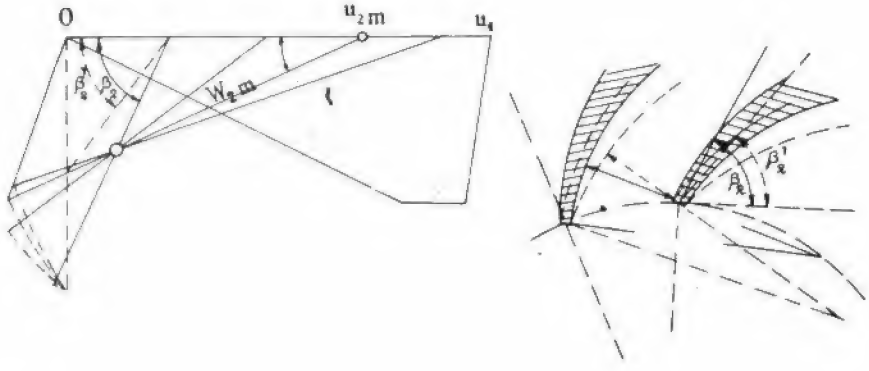


Fig. 14

Dêste modo, a orientação das pás, nos cortes segundo as superfícies de revolução dos filêtes de água, aproxima-se da direcção radial (perfil a traço cheio) à medida que se consideram pontos mais recolhidos da aresta de juzante, e a largura dos canais na região de saída uniformiza-se.

Mas, além desta, há ainda outra vantagem. O ângulo β_2 aumenta, como se disse, para os pontos mais próximos do veio e não diminui sensìvelmente para os mais afastados, vindo a favorecer dêste modo a redução do desenvolvimento circular das turbinas parciais superiores sem prejudicar o das restantes, e facilita a colocação da aresta de saída num plano axial — o que simplifica consideràvelmente a construção da roda.

Como resumo do que se deixa expôsto, conclui-se que, fixada uma posição ao ponto médio, ficam implicitamente definidas para todos os outros pontos da aresta de saída as velocidades relativas, cujas origens coincidem com os vértices dos vectores

$$u_{2x} = u_{2m}\frac{D_{2x}}{D_{2m}} \qquad u_{2y} = u_{2m}\frac{D_{2y}}{D_{2m}}$$

e cujas grandezas são dadas pelas relações:

$$W_{2x}^2 = W_{2m}^2 + u_{2x}^2 - u_{2m}^2 \qquad W_{2y}^2 = W_{2m}^2 + u_{2y}^2 - u_{2m}^2$$

sendo a direcção determinada pela regra acima exposta.

Os diagramas parciais, assim obtidos, dão os valores das velocidades meridianas de saída C_{m2x} e C_{m2y}, para a posição arbitrada ao ponto *M*.

Esta posição será a verdadeira se os vários C_{m2xy}, assim determinados, como semi-somas dessas velocidades, para as sucessivas turbinas parciais, admitirem como valor médio a grandeza C_{m2m}, ou, o que é o mesmo, se a

soma dos caudais elementares fôr igual ao caudal máximo que serviu, na expressão *2*, para o cálculo daquela grandeza — pelo que se deverá verificar a condição

$$Q_{max.} = \Sigma \pi D_{2xy} b_{2xy} C_{m2xy} \sqrt{2hH} \frac{t_2 - \Delta_2}{t_2} \qquad (3)$$

Esta concordância não se consegue, em geral, à primeira tentativa, e então pode proceder-se do modo seguinte, que se expõe, exemplificando, para melhor evidenciar as correcções.

Tendo fixado ao ponto médio, com intencional exagêro, uma posição M' muito para fora da posição rigorosa que se pretende conhecer, *fig. 15*, sucede que o ponto *p'* de cruzamento das velocidades relativas W_{2a}, W_{2b} ..., cujas origens são invariáveis, visto que se não altera a posição dos pontos *a*, *b* ... sôbre a aresta de saída, fica por demais afastado da origem *O* do diagrama, e as distâncias dos vértices daquelas velocidades à recta dos *u u*, que medem as grandezas de C_{m2a}, C_{m2b} ..., virão exageradas.

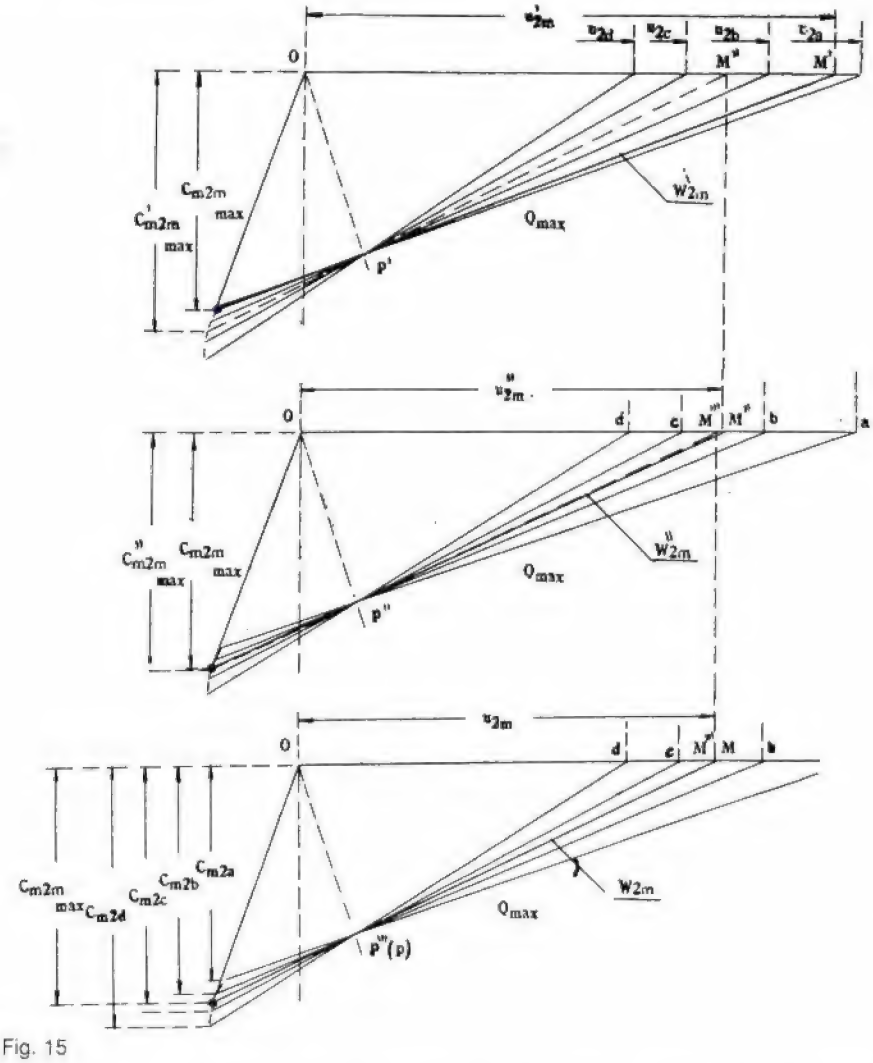


Fig. 15

A última equação dará nestas condições um caudal superior ao da turbina, e pela relação *(2)* calcula-se um novo valor médio $C'_{m2m_{max}}$ maior que o verdadeiro.

Introduzindo no diagrama esta nova velocidade meridiana, acha-se, sôbre o lugar geométrico dos vértices das velocidades relativas, um ponto *v* que

unido com a intersecção *p'* daquelas velocidades permite determinar sôbre a recta dos *u u* uma nova posição *M''* do ponto médio, da qual se parte para uma segunda tentativa.

Tiram-se do diagrama os valores de u''_{2m} e $W''_{2m_{max}}$ diferentes dos anteriores, que servirão para o cálculo das novas velocidades W_{2a}, W_{2b} ....

O ponto *p''* de cruzamento destas velocidades encontra-se agora mais próximo da origem do diagrama que no caso anterior, e os novos C_{m2a}, C_{m2b} ... virão, portanto, menores, dando a expressão *(3)* para o caudal, e a expressão *(2)* para $C_{m2m_{max}}$ valores mais próximos dos verdadeiros.

Imprime-se dêste modo ao ponto médio, mas duma forma segura e regular, um deslocamento que o aproxima sucessivamente da posição rigorosa, à qual se chega, em geral, depois de duas ou três tentativas, muito excepcionalmente quatro.

A sequência das tentativas realiza por esta forma — *gràficamente* — uma combinação de movimentos que tem certa analogia com a dos sistemas mecânicos de regulação com *asservissement de três pontos* — que são neste caso o ponto *M* sôbre a recta dos *u u*, o ponto de cruzamento das velocidades relativas W_2 e o vértice de $C_{2m_{max}}$.

Obtido assim o definitivo diagrama médio de saída para o caudal máximo, divide-se a altura b_o dos canais à entrada da roda em segmentos b_{o1}, b_{o2}, ... proporcionais aos termos do somatório da expressão *(3)*, que representam os caudais escoados pelas sucessivas turbinas parciais.

Os pontos obtidos e os pontos *a*, *b*,... da aresta de saída constituem as únicas referências para o traçado das linhas divisórias, que se faz, em seguida, por simples estimativa, atendendo, no esbôço de cada linha, à regular distribuição das curvaturas, e no conjunto das linhas, à gradual transição de forma e de distância entre elas.

Todo êste traçado fica sujeito a ulteriores correcções que só o estudo detalhado da forma empenada das superficies das pás pode indicar. Para isso é necessário completar o diagrama, *fig 16*, o que se faz pelos processos habituais, passando ao estudo do caudal normal e outros caudais, e, por fim, ao estudo das condições de escoamento à entrada da roda.

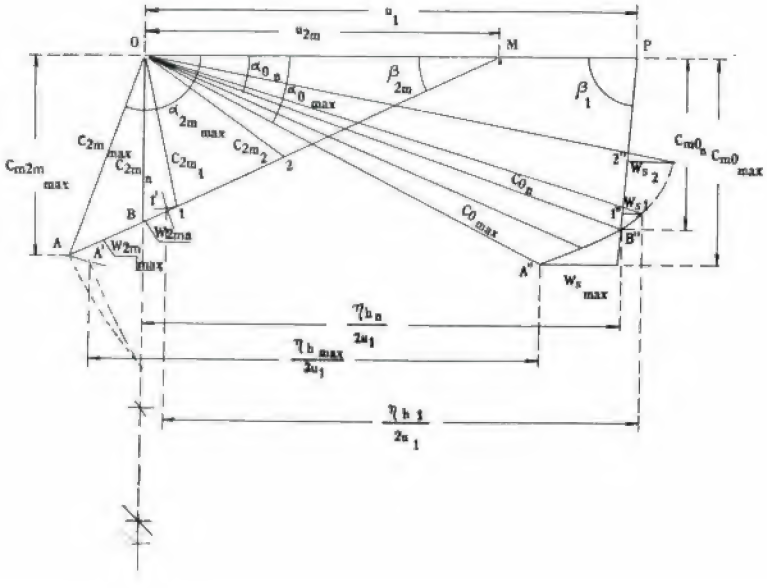


Fig. 16

O diagrama completo permite determinar a curva do rendimento, e fornece ainda os elementos necessários para o estudo do segundo órgão essencial da turbina — o distribuidor.

Entre o método de cálculo e acêrto dos diagramas que acaba de se expôr e o método habitual, há diferenças fundamentais que importa agora descriminar.

Em primeiro lugar, naquele método, a velocidade meridiana da água à saída da roda é calculada por uma equação que intervém directamente nas tentativas a fazer para o referido acêrto.

Depois, não é necessário proceder à divisão do caudal em parcelas rigorosamente iguais pelas várias turbinas elementares, deslocando, um por um, como no processo habitual, os pontos da aresta de saída por onde passam os filêtes divisórios dessas turbinas.

Êste trabalho, já de si aturado e fastidioso, tem sobretudo o inconveniente de ficar sujeito à contingência de ser dado por inútil, quando, ao fim, se procura a concordância entre o débito parcelar e a última turbina que se ensaia. Só então é possível verificar se a posição arbitrada ao ponto médio é na verdade uma posição admissível.

Por último, as tentativas não se efectuam por simples obediência ao sentimento, mais ou menos incerto, das variações a introduzir: obedecem a prescrições que lhes assinalam um caminho metódico e que não só contribuem para as limitar em número, como ainda as orientam.

Terminamos esta ligeira notícia, regressando ao domínio das considerações gerais feitas a princípio.

Como se vê pelo que então se deixou dito, existe de certo modo uma relação entre as concepções construtivas que formam a evolução das turbinas e o aspecto económico que preside à sua aplicação.

Essa relação, note-se, nem sempre se verifica com rigor, mas apenas dum modo aproximado; mesmo porque nestas questões técnico-económicas intervêem muitos e variados factores.

Mas o que dum modo geral se pode afirmar é que, de início, a técnica (não contando com os tempos históricos de Fourneyron — o inventor da turbina, de Jonval e de Girard) solicitada naturalmente pelos casos de aproveitamento mais singelo e de melhor garantia económica, como são, por via de regra, os de média altura, e médios caudais, responde a essa solicitação com as primeiras rodas do sistema Francis, que logo evolucionam, obedecendo à imposição de aproveitar alturas sucessivamente menores, para darem os tipos de configuração mais larga e os mistos de transição.

Segue-se depois um tempo, relativamente extenso, em que o problema se mantém nêste pé. Não se fazia sentir ainda, pròpriamente, a conveniência de aproveitar as quedas mínimas de maiores caudais, e não se encontrou desde logo, consequentemente, a devida solução para êsses casos.

Escasseando, porém, sucessivamente, as quedas médias, foi necessário encarar o problema com a decisão de o resolver. E é neste passo, que Dubs e Kaplan, entre outros, colhendo da experiência novos elementos e tirando dêles as justas e oportunas conclusões, promovem essa brilhante transformação de que resultaram, respectivamente, as soluções hélico-mixta e hélico-axial que, juntamente com a roda Pelton, resolvem por completo o problema das quedas.

Em Portugal, está-se em pleno período Francis. Mas não só aí. Está-se também ainda na florescência serôdia da veneranda roda hidráulica, pela

qual se mantém um culto de superstição que nada faz abalar no seu heróico destino.

Mas a roda hidráulica tem uma indiscutível virtude. A-pesar de aproveitar a hulha branca ao rítmo duma idade em que já não há senão cabelos da mesma côr, tem uma nascença portuguesa.

Nasce velha — é certo, mas o seu berço é nacional. Pertence à mesma terra em que, depois, vem a receber o baptismo da corrente. O que deve constituír suma contrariedade para aqueles que, conseguindo libertar-se dêsse culto de antiguidades de museu, proclamam, todavia, com ares de triunfo e muito sentenciosamente, que não há razão alguma para que neste campo, como em tantos outros, o estrangeiro não continue a pensar por nossa conta...

ESTUDO SOBRE O ELECTRODINAMÓMETRO DE INDUÇÃO

C. FERRER MONCADA
Prof. do I.S.T

Publicado na Técnica n.º 94 de Junho de 1938

O trabalho presente visa o estudo do binário director de natureza electromagnética empregado nos electrodinamómetros de indução.

A expressão do momento dêste binário em relação ao eixo de rotação, será obtida a partir da energia magnética do sistema considerado.

Princípio de funcionamento:

Uma bobina B_2 (Fig. 1), móvel em volta de um eixo, encontra-se no campo magnético produzido pela corrente alternada que circula na bobina fixa B_1. Os eixos magnéticos das duas bobinas formam entre si um ângulo α.

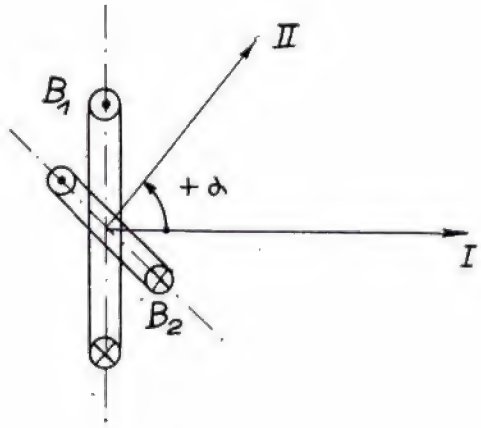


Fig. 1

Os terminais da bobina móvel estão ligados a um circuito exterior formado, no caso mais geral, por resistência, auto-indução e capacidade segundo o esquema da Fig. 2. A corrente que se estabelece por indução no circuito da bobina móvel dá origem ao binário electromagnético que pretendemos estudar.

Estudo do binário electromagnético.

Notacões segundo o esquema da Fig. 2:

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 & \ldots & \text{resistência} \\ L_{11} & \ldots & \text{coeficiente de auto-indução} \\ i_1 & \ldots & \text{valor instantâneo da corrente} \end{array}\right\} \text{da bobina fixa}$$

TÉCNICA, n.º 4 DEZ. 95

r_2 ... resistência
L_{22} ... coeficiente de auto – indução } da bobina móvel
i_2 ... valor instantâneo da corrente

$L_M = L_{12} = L_{21}$ ... coeficiente de indução mútua entre as duas bobinas.

e_{1k} ... valor instantâneo da tensão nos terminais da bobina fixa.

r_a ... resistência
L_a ... coeficiente de auto – indução } do circuito ligado aos terminais da bobina móvel.
C_a ... valor instantâneo da corrente

ε ... base dos logaritmos naturais, $j = +\sqrt{-1}$

No estudo que se segue, consideramos as correntes como quási-estacionárias e desprezamos por isso o campo magnético da corrente de deslocamento. Além disso supomos a permeabilidade magnética independente dos valores instantâneos das correntes e desprezamos as perdas de energia no ferro do circuito magnético e no dieléctrico do condensador. Como sistema de unidades adoptamos o sistema electromagnético.

O valor instantâneo da energia magnética de um sistema de bobinas exprime-se em função das correntes e coeficientes de indução pela relação:

$$u_{m_a} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} i_k i_\lambda L_{k\lambda} \qquad (1)$$

O valor instantâneo do momento do binário electromagnético relativo ao parâmetro α é dado pela expressão:

$$T_\alpha = +\left(\frac{\partial u_{m_a}}{\partial \alpha}\right)_{i=const} \qquad (2)$$

No caso presente em que o sistema é constituído por duas bobinas (Fig. 2) a expressão da energia magnética toma a forma:

$$u_{m_a} = \frac{1}{2} i_1^2 L_{11} + \frac{1}{2} i_2^2 L_{22} + i_1 i_2 L_M \qquad (3)$$

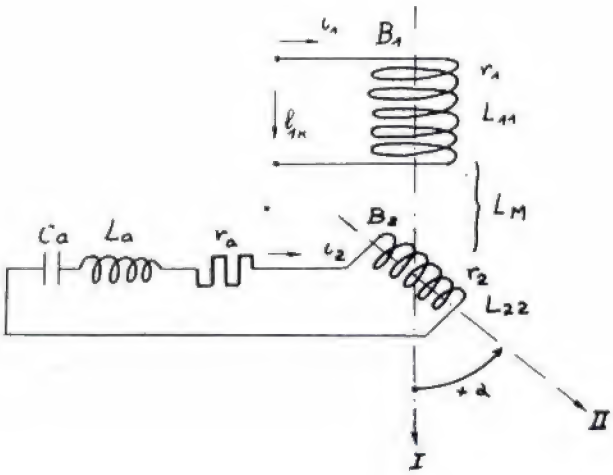


Fig. 2

Os coeficientes de auto-indução L_{11} e L_{22} são independentes do ângulo α.

O coeficiente de indução mútua L_M depende da posição relativa das duas bobinas ou seja, no caso presente, do ângulo α formado pelos seus eixos magnéticos. Admitindo que o campo magnético produzido pela bobina fixa é homogéneo na região em que se encontra a bobina móvel, podemos escrever a relação

$$L_M = L_{Mm} \cos\alpha \tag{4}$$

em que L_{Mm} representa o valor máximo do coeficiente de indução mútua L_M.

Esta relação exprime a lei de variação do coeficiente de indução mútua em função do parâmetro α.

Atendendo às expressões (2), (3), e (4) obtém-se o valor instantâneo do momento do binário electromagnético que actua sôbre a bobina móvel:

$$T_{\alpha i} = +\left(\frac{\partial u_{m\alpha}}{\partial \alpha}\right)_{i=const} = -i_1 i_2 L_{Mm}\, sen\, \alpha \tag{5}$$

Pràticamente interessa calcular o valor médio do momento dêste binário no caso das correntes i_1 e i_2 serem alternadas sinusoidais.

Neste caso têm lugar as seguintes relações:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_1\sqrt{2}\, sen\,(\omega t + 0) \\ i_2 &= I_2\sqrt{2}\, sen\,(\omega t + \varphi) \\ i_1 i_2 &= I_1 I_2\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

em que I_1 e I_2 representam os valores eficazes, φ o ângulo de desfasagem entre as duas correntes e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a sua pulsação.

Atendendo às relações (5) e (6) obtém-se o valor médio do momento do binário electromagnético:

$$T_\alpha = -L_{Mm}\, sen\,(\alpha)\left\{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} i_1 i_2\, dt\right\} = -I_1 I_2 \cos(\varphi).L_{Mm}\, sen\, \alpha \tag{7}$$

Pretendemos agora estudar, para determinadas constantes do circuito da bobina móvel (Fig. 2), a maneira como o momento T_α depende da corrente I_1 e do ângulo α. Para isso vamos exprimir a grandeza $I_2 \cos\varphi$ em função de I_1 e de α.

A aplicação das leis fundamentais do electromagnetismo ao circuito da bobina móvel B_2 (Fig. 2) fornece-nos a seguinte equação de valores instantâneos:

$$i_2(r_2 + r_a) + (L_{22} + L_a)\frac{di_2}{dt} + \frac{\int i_2 dt}{C_a} + L_M \frac{di_1}{dt} = 0 \tag{8}$$

Adoptando a notação simbólica obtemos as seguintes expressões para os valores instantâneos das correntes sinusoidais I_1 e I_2:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_1 \varepsilon^{j\varphi_1}.\varepsilon^{j\omega t} = \sqrt{2}\dot{I}_1 \varepsilon^{j\omega t} \\ i_2 &= \sqrt{2} I_2 \varepsilon^{j\varphi_2}.\varepsilon^{j\omega t} = \sqrt{2}\dot{I}_2 \varepsilon^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Das expressões (8) e (9) resulta a equação vectorial em notação simbólica para os valores eficazes das correntes:

$$\dot{I}_2\left(r_2+r_a\right)+j\dot{I}_2\left(\omega L_{22}+\omega L_a-\frac{1}{\omega C_a}\right)+j\dot{I}_1\omega L_M=0 \tag{10}$$

Para simplificar usamos as seguintes notações:

$$\left.\begin{aligned} r_2' &= r_2+r_a \\ \omega L_{22} &= \omega L_{22}+\omega L_a-\frac{1}{\omega C_a} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Das expressões (10) e (11) obtemos a seguinte relação vectorial entre os valores eficazes das correntes:

$$\dot{I}_2=-j\frac{\omega L_M}{r_2'+j\omega L_{22}'}\dot{I}_1 \tag{12}$$

Esta expressão pode escrever-se sob a forma

$$\dot{I}_2=-(A+jB)\dot{I}_1 \tag{13}$$

em que A e B são reais e têm os seguintes valores:

$$\left.\begin{aligned} A &= \omega L_{22}\frac{\omega L_M}{r_2'^2+\left(\omega L_{22}'\right)^2} \\ B &= r_2'\frac{\omega L_M}{r_2'^2+\left(\omega L_{22}'\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Das equações (13) e (14) resultam as expressões:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-A}{+\sqrt{A^2+B^2}} \\ I_2 &= I_1\sqrt{A^2+B^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$I_2\cos\varphi=-AI_1=-\omega L_{22}\frac{\omega L_M}{r_2'^2+\left(\omega L_{22}'\right)^2}I_1 \tag{16}$$

Introduzindo o valor de $I_2\cos\varphi$ da expressão (16) na equação (7) e atendendo à relação (4) resulta para o valor médio do momento do binário electromagnético a seguinte expressão:

$$T_a=+\frac{1}{2}I_1^2L_{22}\frac{\omega^2L_{Mm}^2}{r_2'^2+\left(\omega L_{22}'\right)^2}sen\,(2\alpha) \tag{17}$$

Esta expressão indica-nos que o momento T_a é proporcional ao quadrado do valor eficaz da corrente na bobina fixa e depende das constantes do circuito da bobina móvel e da sua posição em relação à bobina fixa. Antes de passarmos ao estudo das posições de equilíbrio da bobina móvel para um determinado carácter do seu circuito exterior vamos escrever a expressão do valor médio da energia magnética do sistema.

Atendendo às equações (3), (4) e (6) obtém-se para valor médio da energia magnética a expressão:

$$U_m=\frac{1}{2}I_1^2L_{11}+\frac{1}{2}I_2^2L_{22}+I_1I_2\cos(\varphi)L_{Mm}\cos\alpha \tag{18}$$

A partir desta expressão obtém-se directamente o valor médio do momento T_α:

$$T_\alpha = +\left(\frac{\partial U_m}{\partial \alpha}\right)_{I=const.} = -I_1 I_2 \cos(\varphi) L_{Mm}\, sen\, \alpha \qquad (19)$$

que está de acôrdo com a equação (7).

Sentido do binário e posições de equilíbrio.

A equação (19) exprime que o binário electromagnético actua no sentido em que $+\left(\frac{\partial U_m}{\partial \alpha}\right) > 0$, isto é, no sentido em que a energia magnética do sistema cresce com o parâmetro α.

A partir do sinal de T_α (equação 17) obtemos assim o sentido do binário:

$T_\alpha > 0$ ... o binário actua no sentido de α. crescente;

$T_\alpha < 0$ ... o binário actua no sentido de α.decrescente;

$T_\alpha = 0$ ... posições de equilíbrio $\begin{cases} \frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} > 0 & \ldots \; instável \\ \frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} < 0 & \ldots \; estável. \end{cases}$

Da equação (17) conclui-se que o sentido do binário depende não só do valor do ângulo α .formado pelos eixos magnéticos das bobinas mas também do sinal de L'_{22}, isto é, do carácter do circuito da bobina móvel.

A partir da equação (11) obtém-se para L'_{22} a seguinte expressão:

$$L'_{22} = L_{22} + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a}. \qquad (20)$$

Temos três casos a considerar:

1.º) $L'_{22} > 0$ ... circuito com carácter indutivo

2.º) $L'_{22} < 0$ ... circuito com carácter capacitivo

3.º) $L'_{22} = 0$ ... circuito com carácter óhmico puro (circuito em ressonância).

Passamos ao estudo do comportamento do binário em cada um dêstes casos.

1.º) Circuito com carácter indutivo $L'_{22} > 0$

Posições de equilíbrio [Fig. (3) e (4)].

A condição de equilíbrio exprime-se pela relação:

$$T_\alpha = 0$$

que segundo a equação (17) acarreta a relação:

$$sen\, 2\alpha = 0.$$

Assim, temos:

$$\begin{array}{c} Equilíbrio \\ L'_{22} > 0 \\ T_\alpha = 0 \\ sen\, 2\alpha = 0 \end{array} \begin{cases} \alpha = 0 \quad \alpha = \pi \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha=\pi}} > 0 \; instável \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = 3\frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=3\frac{\pi}{2}}} < 0 \; estável \end{cases}$$

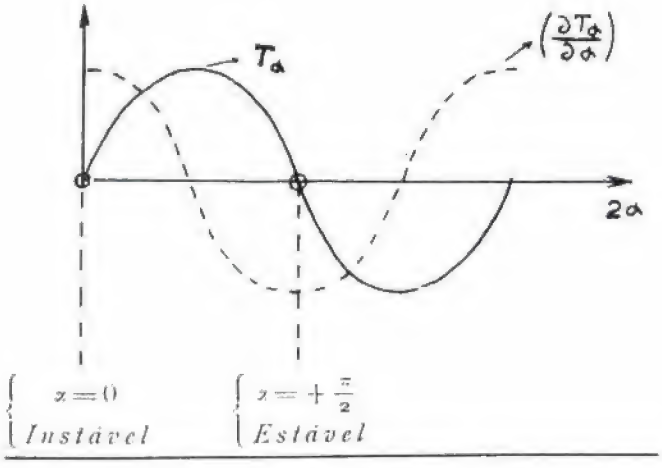


Fig. 3

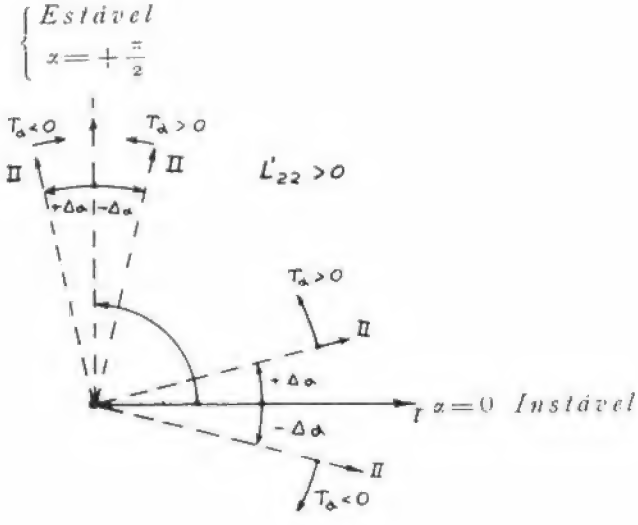


Fig. 4

O equilíbrio será instável para $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$, o que corresponde respectivamente à coincidência e oposição dos eixos magnéticos das bobinas.

O equilíbrio será estável para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = 3\frac{\pi}{2}$, o que corresponde à perpendicularidade dos mesmos eixos.

Das equações (4) e (12) conclui-se que a corrente $\dot{I}_2$ é nula nas posições de equilíbrio estável $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = 3\frac{\pi}{2}\right)$ e muda de sinal quando α passa por estes valores. O diagrama de vectores da Fig. (5) traduz a equação vectorial (12) para valores de α compreendidos nas regiões $0 \to \frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2} \to 2\pi$. O vector corrente $\dot{I}_2$ está em atrazo sôbre $\dot{I}_1$ e o ângulo de desfasagem é superior a $\frac{\pi}{2}$ o que acarreta $\cos\varphi < 0$. Para valores de α entre os limites $\frac{\pi}{2} \to 3\frac{\pi}{2}$ o vector corrente $\dot{I}_2$ tem a mesma direcção mas o seu sentido é oposto ao indicado no diagrama da fig. (5). Nestas condições o vector corrente $\dot{I}_2$ estará em avanço sôbre $\dot{I}_1$ e o ângulo de desfasagem será inferior a $\frac{\pi}{2}$ o que condiciona $\cos\varphi > 0$.

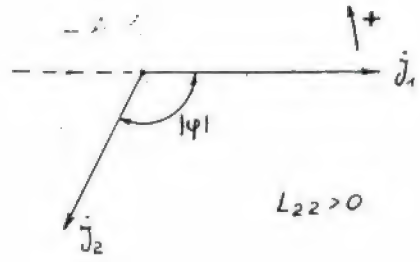


Fig. 5

Estas considerações são suficientes para a interpretação directa da equação (7) e permitem chegar às mesmas conclusões a que nos conduz a expressão (17).

Em face da equação (17) traçámos na fig. (3) o diagrama linear de T_α e de $\left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha}\right)$ em função do ângulo (2α) para I_1 = constante. Êste diagrama mostra as duas posições de equilíbrio $\left(\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ e as regiões relativas a T_α positivo e a T_α negativo desde $\alpha = 0$ até $\alpha = \pi$. O momento T_α é máximo para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e tem o valor (equação 17):

$$T_{\alpha_{max}} = +\frac{1}{2} I_1^2 L_{22} \frac{\omega^2 L_{Mm}^2}{r_2'^2 + (\omega L_{22})^2}.$$

Na fig. (4) encontra-se representado o eixo magnético I da bobina fixa e, na vizinhança das posições de equilíbrio $\left(\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, o eixo magnético II da bobina móvel com indicação do sentido do binário.

2.º) Circuito com carácter capacitivo $L_{22} < 0$.

A equação (17) mostra-nos que para os mesmos valores de α o momento T_α tem agora sinal contrário ao do caso anterior. Para as posições de equilíbrio podemos portanto concluir:

$$\begin{array}{c} \textit{Equilíbrio} \\ L_{22} < 0 \\ T_\alpha = 0 \\ sen\, 2\alpha = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \;,\; \alpha = \pi \;\ldots\; \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha=\pi}} < 0 \; \textit{estável} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \;,\; \alpha = 3\frac{\pi}{2} \ldots \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=3\frac{\pi}{2}}} > 0 \; \textit{instável} \end{array} \right.$$

As posições relativas dos eixos magnéticos das bobinas que no caso anterior correspondiam a equilíbrios estáveis passam agora a corresponder a equilíbrios instáveis e reciprocamente. As considerações sôbre a variação do momento T_α são portanto análogas às do caso anterior.

A Fig. (6) corresponde à Fig. (4) do caso anterior e mostra a posição do eixo magnético da bobina fixa em relação ao eixo magnético da bobina móvel nas vizinhanças das posições de equilíbrio: $\alpha = 0$ estável, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ instável.

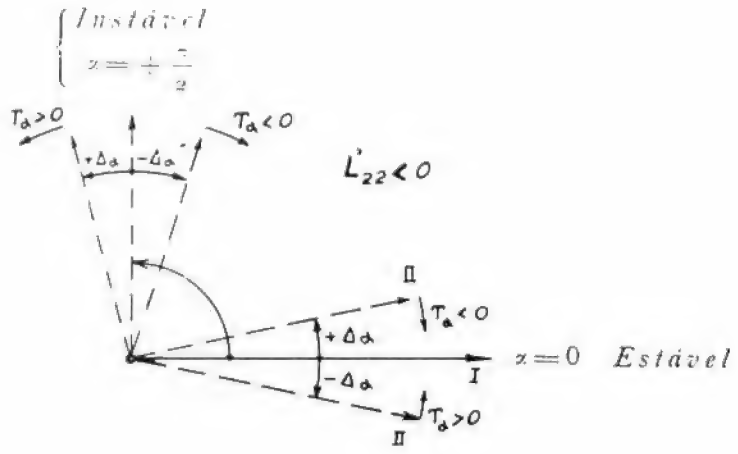


Fig. 6

A fig. (7) representa, de acôrdo com a equação (12), o diagrama de vectores relativo às correntes $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ válido para valores de α compreendidos nas regiões $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2} \rightarrow 2\pi$. O vector corrente $\dot{I}_2$ está em atrazo em relação a $\dot{I}_1$ 0 ângulo de desfasagem é inferior a $\frac{\pi}{2}$ e portanto $\cos\varphi > 0$. Para valores de α entre $\frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2}$ o vector corrente $\dot{I}_2$ tem sentido oposto ao indicado no diagrama da fig. 7 e fica em avanço sôbre $\dot{I}_1$. O ângulo de desfasagem é superior a $\frac{\pi}{2}$ e portanto $\cos\varphi < 0$.

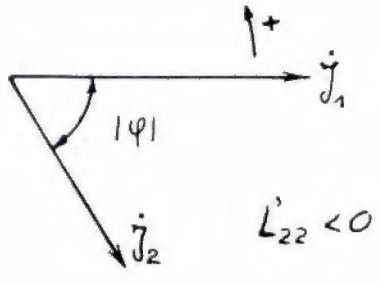


Fig. 7

Na posição de equilíbrio estável $\alpha = 0$ os eixos magnéticos das bobinas coincidem e o valor eficaz da corrente $\dot{I}_2$ atinge o seu valor máximo em função de α.

3.º) Circuito com carácter óhmico puro $L'_{22} = 0$.

O circuito encontra-se em ressonância.
A condição $L'_{22} = 0$ acarreta segundo a equação (17) a igualdade

$$T_a = 0$$

para qualquer valor do parâmetro α

A bobina móvel encontra-se portanto em equilíbrio em qualquer posição. O equilíbrio é indiferente.

De acordo com a equação (12) traçamos na fig. (8) o diagrama de vectores $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ válido para valores de α compreendidos nas regiões $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2} \rightarrow 2\pi$.

Os vectores estam desfasados de $\pi 2$ e portanto $\cos\varphi = 0$.

Para valores de α entre $\frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2}$ o vector corrente $\dot{I}_2$ tem sentido contrário ao representado na Fig. 8 mas conserva-se perpendicular ao vector $\dot{I}_1$ A igualdade $\cos\varphi = 0$ continua portanto a ter validade e o valor da energia magnética do sistema, equação (18), reduz-se neste caso a

$$U_m = \frac{1}{2} I_1^2 L_{11} + \frac{1}{2} I_2^2 L_{22}$$

$$L_{22} = 0$$

para qualquer valor de α.

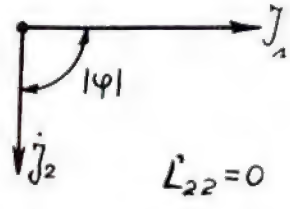


Fig. 8

Do que fica exposto conclui-se que, para ser possível obter um binário director electromagnético, é necessário construir o circuito da bobina móvel de maneira que êle não entre em ressonância com a frequência que lhe é imposta.

EDINFOR

Sistemas Informáticos, S.A.

UM SERVIÇO COMPLETO E CONTINUADO ...

- Exploramos dois grandes Centros de Processamentos de Dados com os quais fornecemos **Outsourcing** e **Disaster Recovery**.
- Utilizamos as mais modernas tecnologias de **Comunicação de Dados**, incluindo comunicações por satélite do tipo VSAT.
- Desenvolvemos **Sistemas de Gestão Comercial** através dos quais são já hoje atendidos de forma personalizada mais de 5 milhões de clientes dos sectores de electricidade, água e gás.
- Implementamos soluções integradas de gestão empresarial baseadas no pacote de software " **SAP - R/3**", adaptando-o aos procedimentos específicos de cada empresa.
- Representamos o produto tecnologicamente mais avançado **(SMALLWORLD GIS)**, para o desenvolvimento de Sistemas de Informação Geográfica e fornecemos serviços de aquisição de dados e desenvolvimento de aplicações.
- Exploramos um dos maiores parques de **Impressão e Envelopagem** da Europa, com capacidade superior a 500.000 documentos personalizados por dia.

...ASSEGURA-LHE O SUCESSO

Av. Sidónio Pais, 28 - 1º Dtº. 1050 LISBOA * Tel.: 352 86 16 * Fax: 356 16 96

MOVIMENTO PERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO ESTUDO GERAL DO REGOLFO

ALBERTO ABECASIS MANZANARES
Eng. Civil do I.S.T
Publicado na Técnica n.º 115 de Dezembro de 1940

Este artigo faz parte de um trabalho mais extenso, feito pelo autor durante o seu estágio, como bolseiro do "Instituto para a Alta Cultura", no laboratório de hidráulica anexo à Escola Politécnica Federal de Zurich. Devido a isto, encontram-se no seu texto referências a outras partes do mesmo trabalho; procurou-se contudo, ao publicar êste capítulo imprimir-lhe a clareza duma publicação isolada. Trata-se dum estudo completamente original baseado na teoria da linha da energia. Espera o autor poder posteriormente publicar o trabalho completo de que êste artigo constitui o 2.º capítulo.

Examinando o que tem sido feito até hoje no estudo e resolução da questão do regolfo encontramos que, àparte a resolução do problema por tentativas sucessivas aproveitando o método das diferenças finitas e baseando-se na equação fundamental de Bernouilli aplicada às correntes onde existe um esfôrço resistente oposto ao movimento, pouco se tem feito. Considerando em primeiro lugar os canais prismáticos com caudal constante e filetes rectilíneos ou assemelháveis, vemos que não existe nenhum método de resolução geral do assunto. Conhecemos, para os canais rectangulares de largura muito grande, a equação de Bresse que, integrada e posta em tabelas, nos fornece a curva do regolfo neste caso. No caso do regolfo de depressão no mesmo canal rectangular muito largo, Schaffernak deduziu umas tabelas semelhantes. Foi também achada e integrada a equação no caso do perfil triangular por Puppini, no perfil parabólico por Tolkmitt e no perfil rectangular não muito largo por Masoni. Bakmethef e Evangelisti, utilizando artifícios de cálculo, encontraram solução para o caso da secção trapézia; algumas destas soluções têm certos defeitos, como veremos mais tarde.

O problema não tem sido resolvido duma maneira geral, e isto obriga a que, quando se pretende encontrar a curva do regolfo formado num canal de secção qualquer, é necessário recorrer ao cálculo das diferenças finitas, ou em geral assimilá-lo a um canal rectangular muito largo ou outro e aplicar as tabelas respectivas, corn evidente prejuizo da exactidão.

Pensei que talvez partindo da teoria da linha de energia fôsse possível encontrar uma expressão geral válida para qualquer secção, e efectivamente cheguei a estabelecê-la. Consegui, ainda, empregando coordenadas adimensionais, e utilizando um único ábaco, resolver praticamente e com a aproximação que se quiser o problema da determinacão da curva do regolfo num canal qualquer, tudo isto de forma relativamente simples.

O método utilizado tem ainda a vantagem de, como veremos a seguir, ser generalizável aos outros casos de regolfo em que o caudal ou a inclinação não são constantes, ou ainda quando intervém uma certa curvatura dos filetes líquidos.

Vamos então a estudar agora uma solução geral do problema do regolfo para um perfil prismático de forma qualquer. Consideraremos, por agora o caudal e a inclinação do leito constantes.

Antes de entrar propriamente no problema, vamos fazer um resumo das notações empregadas a seguir:

Q = caudal total

q = caudal por metro de largura

Ω = secção líquida

χ = perímetro molhado

$R = \frac{\Omega}{\chi}$ = Raio médio ou hidráulico

s = comprimento, medido ao longo do eixo do canal, a partir duma origem

z = ordenada dum ponto do liquido, medida sôbre o ponto mais baixo do fundo do canal, na secção considerada

h = altura ou ordenada da superfície livre medida como z

b = largura da secção líquida a superfície

H = altura da linha da energia total medida como as anteriores

V= velocidade de componentes u, v, w

V_m = velocidade média = U

c = coeficiente de atrito (Chezy)

k = coeficiente de atrito (Strickler)

i = inclinação do fundo do canal ou do leito

J = inclinação da superficie líquida

J_e= inclinação da linha da energia

α, α', β = coeficientes já definidos. [Energia cinética, quantidade de movimento e distribuïção não hidrostática das pressões]

x = abcissa horizontal do escoamento

y = y (x) = equação da linha de talweg.

Para indicar os valores correspondentes aos movimentos uniforme e crítico empregaremos os indices *u* e *c*. Assim h_u e h_c indicarão as alturas correspondentes aos regimes uniforme e crítico.

Recordemos a expressão mais geral da energia total ou da altura da linha de energia

$$H = \beta h + \frac{\alpha U^2}{2g} \tag{12}$$

Neste primeiro estudo já dissemos que vamos supor o paralelismo e a rectidão dos filetes líquidos, quere dizer, faremos β = 1 permanentemente. Ao segundo coeficiente α será dado um valor
sensivelmente constante, mas diferente da unidade, dependente única e exclusivamente da turbulência.

Recordaremos ainda que Q = U Ω e que, como consideramos um canal prismático, a área de secção líquida Ω será unicamente função da altura líquida h

$$\Omega = \Omega(h)$$

Então a derivada da secção Ω em relação a s tem a seguinte expressão

$$\frac{d\Omega}{ds}=\frac{d\Omega}{dh}\frac{dh}{ds}=b\frac{dh}{ds} \tag{23}$$

por ser

$$\frac{d\Omega}{dh}=b$$

A expressão da energia pode escrever-se

$$H=\beta h+\frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2}=h+\frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} \quad \text{supondo } \beta=1$$

e podemos obter a expressão do caudal

$$Q=\Omega\sqrt{\frac{2g}{\alpha}(H-h)} \tag{24}$$

Ora tendo em conta, como vimos no primeiro capítulo, que a expressão (12) e portanto a (24) tem de ser verificadas em todos os pontos da corrente líquida ou do regolfo, e que por outra parte êste, no caso presente, é caracterizado por um caudal constante, vemos que a expressão

$$\frac{dQ}{ds}=0 \tag{25}$$

servirá para caracterizar o fenómeno do regolfo qualquer que seja a secção Ω

Antes de continuar, vamos fazer uma pequena digressão, recordando algumas noções já conhecidas da hidráulica.

Voltemos à equação (6) que no caso do movimento permanente se escreve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}+\frac{P}{\gamma}+z\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}+h+z\right)=-J_e \tag{26}$$

Nesta equação z representa a ordenada do fundo do canal em relação a uma horizontal e então

$$\frac{\partial z}{\partial s}=i$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g}+h\right)=\frac{\partial H}{\partial s}=i-J_e$$

É necessário ter em conta que a derivada anterior é parcial quando o tempo intervém, mas no nosso caso de permanência do movimento podemos escrever

$$\frac{dH}{ds}=i-J_e \tag{27}$$

Nos nossos cálculos partiremos da hipótese, geralmente admitida, de que a perda de energia ou de carga total J_e tem a mesma expressão no movimento permanente do que no movimento uniforme e que a ela é dada pela fórmula, mais simples, de Chezy

$$J_e=\frac{U^2}{c^2R} \tag{28}$$

Poderíamos ter empregado outras fórmulas: Ganguillet et Kutter, Gaucler e Strickler, (hoje vulgarmente empregada) etc. ou mesmo a equação geral preconizada pelos hidrodinâmicos

$$J_e = \frac{1}{2g}\lambda\frac{U^2}{R}$$

na qual λ é um número que depende da rugosidade relativa $\frac{\varepsilon}{R}$ e do número de Reynolds $\frac{U.R}{\nu}$, sendo ε um comprimento que representa a rugosidade absoluta das paredes e do fundo, e ν a viscosidade cinemática da água; empregamos porém a fórmula de Chezy, como aliás quási sempre se faz quando se trata de êste assunto, por uma questão de facilidade de cálculo.

Escrevamos então que na expressão (24) deve ser $\frac{dQ}{ds} = 0$, teremos

$$\frac{dQ}{ds} = \sqrt{\frac{2g}{\alpha}}\left[\frac{d\Omega}{ds}\sqrt{H-h} + \Omega\frac{\frac{d}{ds}(H-h)}{2\sqrt{H-h}}\right] = 0 \qquad (29)$$

ou

$$2b\frac{dh}{ds}(H-h) + \Omega\left(\frac{dH}{dS} - \frac{dh}{ds}\right) = 0$$

e tendo em conta as equações (27) e (12) podemos escrever:

$$2b\frac{dh}{ds}\frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} + \Omega i - \Omega J_e - \Omega\frac{dh}{ds} = 0$$

ou desembaraçando $\frac{dh}{ds}$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\Omega i - \Omega J_e}{\Omega - b\frac{\alpha Q^2}{g\Omega^2}} = i\frac{\Omega - \Omega\frac{J_e}{i}}{\Omega - b\frac{\alpha Q^2}{g\Omega^2}} \qquad (30)$$

Recordemos agora que a perda de carga é dada pela fórmula (28) e que no caso do movimento uniforme a linha de energia é paralela ao fundo do canal, teremos:

$$J_e = \frac{Q^2}{c^2\Omega^2 R}$$

$$i = \frac{Q^2}{c^2\Omega_u^2 R_u}$$

e portanto

$$\frac{J_e}{i} = \frac{\Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R} \qquad (31)$$

Por outra parte e recordando a expressão (I5) em relação à secção crítica sabemos que

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{b_c}{\Omega_c^3} = 1$$

e portanto o segundo têrmo do denominado de (30) pode escrever-se

$$\frac{b}{\Omega^2}\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{b}{\Omega^2}\frac{\Omega_c^3}{b_c} = \frac{\Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R}\frac{b}{b_c}\frac{\chi_c}{\chi} \qquad (32)$$

e substituindo em (30), multiplicando numerador e denominador por ΩR obtém-se

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c \frac{b\chi_c}{b_c \chi}} \tag{33}$$

ou ainda, desprezando o factor $\frac{b\chi_c}{b_c \chi}$ como vamos justificar

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} \tag{34}$$

Esta expressão, desde que nós justifiquemos o facto de ter desprezado o factor $\frac{b\chi_c}{b_c \chi}$, é da mais ampla generalidade; ela, com efeito, não nos introduz nenhuma limitação de forma da secção, visto que para tôdas as secções é possivel definir às condições críticas e uniformes. Devemos ainda fazer a advertência de que, a-pesar-de desprezar o referido factor, a nossa fórmula coincide com as fórmulas já existentes para os diferentes casos particulares e ainda aperfeiçoa alguma, como a de Tolkmitt.

Vamos justificar a aproximação feita: Examinando a expressão (33) observamos que o êrro cometido fica unicamente no denominador. Vê-se imediatamente que para estados muito próximos do crítico o termo $\frac{b\chi_c}{b_c \chi}$, é quási exactamente igual à unidade e o êrro cometido insignificante, isto é, quási nulo. Para estados mais afastados do crítico, o termo mencionado vai diferindo pouco a pouco da unidade, mas sempre relativamente pouco; mas, nestes casos o termo é bastante maior que $\Omega_c^2 R_c$ e o êrro cometido é também desprezível.

Vamos fazer o cálculo do êrro para um caso particular. O leitor poderá repetir o cálculo para quaisquer outras condições com a certeza de que encontrará sempre um êrro desprezível, tanto mais tendo em conta os erros próprios dos cálculos que estamos a proceder, devido a inumeráveis causas.

Suponhamos um canal trapézio cujas margens tenham a inclinação m = 1. Tomemos a altura crítica como unidade de dimensões. Seja $b_0 = 4$ a largura do fundo e suponhamos que a altura da água numa secção determinada é igual a 2, isto é, dupla da altura crítica. Calculemos os diferentes termos que figuram no denominador da equação (33); façamos os cálculos também para h = 1,1, valor próximo da altura crítica.

$$\Omega = (b_o + mh)h$$

	$h_c = 1$	$\Omega_c = 5$
a)	$h = 2$	$\Omega = 12$
b)	$h = 1,1$	$\Omega = 5,61$

$$\chi = b_0 + 2h\sqrt{1+m^2}$$

$$R = \frac{\Omega}{\chi}$$

	$\chi_c = 6,83$	Rc = 0,73
a)	$\chi = 9,65$	R = 1,24
b)	$\chi = 7,11$	R = 0,79

$$b = b_0 + 2mh$$

	$b_c = 6$	$\Omega^2{}_c Rc = 18{,}25$
a)	$b = 8$	$\Omega^2 R = 178{,}56$
b)	$b = 6{,}2$	$\Omega^2 R = 24{,}90$

Calculemos os termos correctivos nos dois casos:

$$a)\ \frac{6{,}83 \times 8}{9{,}65 \times 6} = 0{,}945$$

$$b)\ \frac{6{,}83 \times 8}{7{,}11 \times 6} = 0{,}995$$

Comparemos, agora, nos dois casos o valor do denominador da expressão (33) com e sem termo corrector:

a) 178,50 - 18,25 = 160,25
178,50 - 18,25 × 0,945 = 161,25

Êrro relativo:

$$E = \frac{\dfrac{1}{161{,}25} - \dfrac{1}{160{,}25}}{\dfrac{1}{161{,}25}} = -0{,}007$$

b) 24,90 - 18,25 = 6,65
24,90 - 18,25 × 0,995 = 6,74

$$E = \frac{\dfrac{1}{6{,}74} - \dfrac{1}{6{,}65}}{\dfrac{1}{6{,}74}} = -0{,}012$$

Como vemos, no caso em que o êrro existe, êle é perfeitamente desprezível.

É necessário fazer uma advertência: No caso das secções fechadas progressivamente na sua parte superior, como são as circulares, a largura superficial diminue ao mesmo tempo que o perímetro molhado aumenta e então o termo $\frac{b\chi_c}{b_c\chi}$, pode ter, segundo as condições, valores bastante diferentes da unidade. Nestas secções e no caso em que o regolfo actue na parte superior que estreita progressivamente, será bom verificar a grandeza do máximo êrro atingido, com o fim de ter a certeza de que a fórmula é ainda ou não aplicável com a aproximação desejada.

Vamos agora introduzir uma nova expressão para representar secções de diferentes formas numa única fórmula. Esta expressão foi empregada por Nebbia.

Consideremos uma secção de tipo qualquer para a qual seja válida a expressão:

$$\Omega = Ch^n \tag{35}$$

quere dizer a secção é sempre exprimível numa potência da altura, multiplicada por uma constante C. O expoente n é um parâmetro puramente numérico. O coeficiênte C tem as dimensões L^{2-n}.

Esta secção, que nós chamaremos secção monómia, engloba como casos particulares as secções: rectangular para a qual n = 1; parabó1ica onde $n = 3/2$ e triangular para n = 2.

Como observacão complementar indicaremos a maneira de obter os valores de C e n no caso duma seccão qualquer irregular.

Derivemos a expressão (35) em relação a h e tendo em conta que $\frac{d\Omega}{dh} = b$ teremos:

$$b = Cnh^{n-1}$$

Medindo agora na secção considerada as larguras correspondentes às diversas alturas, podemos obter a curva relacionando as larguras com as alturas; se representarmos logarítmicamente essa curva teremos:

$$\log b = \log n\,C + (n-1)\log h$$

Representando em coordenadas logarítmicas os valores de b e de h obtidos, obteremos uma recta cujo coeficiente angular será igual a n-1, de onde poderemos obter o valor de n. A ordenada na origem dá-nos o valor de n C, do qual podemos deduzir o valor de C, e, portanto, a representação monómia da secção.

Substituindo valores na fórmula (34) e supondo que o raio médio é proporcional à profundidade h (hipótese exacta para algumas secções e suficientemente aproximada noutras, como por exemplo na secção parabólica na qual Tolkmitt fez uma hipótese bem mais arbitrária) obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} =$$

$$= i\frac{C^2 h^{2n} \times C_1 h - C^2 h_u^{2n} C_1 h_u}{C^2 h^{2n} \times C_1 h - C^2 h_c^{2n} C_1 h_c} =$$

$$= i\frac{h^{2n+1} - h_u^{2n+1}}{h^{2n+1} - h_c^{2n+1}}$$

expressão geral para tôdas as secções exprimíveis em forma monómia. A expressão da altura crítica para o mesmo tipo de secções pode obter-se substituindo valores na expressão (15) e assim obteremos:

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{b_c}{\Omega_c^3} = \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{Cnh_c^{n-1}}{C^3 h_c^{3n}} = 1$$

e portanto

$$h_c = \sqrt[2n+1]{\frac{n}{C^2}\frac{\alpha Q^2}{g}} \qquad (36)$$

Vejamos agora o que é que nos fornece esta fórmula nos casos particulares das secções rectangulares, triangulares ou parabólicas, casos já estudados em separado por diversos autores.

Secção rectangular muito larga = A Neste caso a hipótese que fizemos sôbre a proporcionalidade do raio médio e da altura é exactamente verificada.

Teremos

n = 1 C = b_o (ou largura unitária no caso de secção muito larga)

e as fórmulas serão

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{h^3 - h_u^3}{h^3 - h_c^3} \tag{37}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g}} \tag{38}$$

estas duas expressões são já nossas conhecidas. A primeira é a equação de Bresse.

Secção triangular = A hipótese sôbre o raio médio é também exactamente verificada neste caso.

Teremos

$$n = 2$$

e portanto

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{h^5 - h_u^5}{h^5 - h_c^5} \tag{39}$$

que é a equação obtida por Puppini para a mesma secção.

A altura crítica será dada por

$$h_c = \sqrt[5]{\frac{2}{m^2}\frac{\alpha Q^2}{g}}$$

sendo m = inclinação das margens

Secção parabólica = Devemos fazer uma advertência: Tolkmitt, que foi quem estudou êste caso particular, admite na sua dedução que o raio médio R é dado pelo quociente da secção líquida dividida pela largura da superfície livre b. Vê-se que esta é uma aproximacão que poderá ocasionar um êrro bastante grande. Com a hipótese de Tolkmitt verifica-se a proporcionalidade entre o raio médio e a profundidade. A nossa hipótese é ùnicamente esta última e atribuimos ao raio médio, para determinação da sua grandeza, quando isto fôr necessário, o seu verdadeiro valor. Como vemos, estamos mais próximos da realidade do que Tolkmitt.

Na secção parabólica $n = \frac{3}{2}$ e então

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{h^4 - h_u^4}{h^4 - h_c^4} \tag{41}$$

equação já achada por Tolkmitt. A expressão formal da equação de Tolkmitt é igual à nossa, mas nós temos a vantagem de introduzir o verdadeiro valor do raio médio nos calculos.

A equação da secção parabólica será

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2ph$$

sendo p o parâmetro da parábola.

Nestas condições a altura crítica é dada por

$$h_c = \sqrt[4]{\frac{27}{64p}\frac{\alpha Q^2}{g}} \tag{42}$$

É talvez bom recordar que a secção líquida e o perímetro molhado da parábola são dados por:

$$\Omega = \frac{2}{3}bh$$

$$\chi = \sqrt{h^2 + \frac{p}{2}h} + \frac{p}{2} \log \text{nep.} \frac{p}{\sqrt{p^2 + 2ph} - \sqrt{2ph}}$$

Podemos, finalmente, encontrar o integral da curva de regolfo no caso duma secção trapézia.

Partindo da equação (34) e transformando temos:

$$idx = dh \frac{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u} = dh \left(1 + \frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u} \right)$$

e portanto

$$ix = h + (\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c) \int \frac{dh}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u} \qquad (43)$$

Ora no caso da secção trapézia, as expressões de Ω e R são:

$$\Omega = (b_0 + mh)h$$

$$R = \frac{(b_0 + mh)h}{b_0 + 2\sqrt{1 + m^2}\, h}$$

sendo m = inclinação da margem [1] e b_0 = largura do fundo.

Observa-se imediatamente que o integral se reduz ao quociente de duas funções racionais; por outra parte o denominador tem tôdas as suas raizes iguais a h_u, e então será trabalhoso, mas não impossível, o cálculo do integral e, portanto, da forma algébrica da curva de regolfo ou superfície livre.

Encontramos, então, em forma explícita o integral da curva de regolfo no caso da secção trapézia. Poder-se-iam formar tabelas, com os resultados que se obteriam. Apesar de tudo não prosseguimos os cálculos e contentámo-nos com mostrar que isso era possível, e vamos já ver porque.

Recordemos a fórmula geral (34). A principal consequência do nosso estudo não é a dedução desta fórmula, já por si bastante importante, mas sim o facto de podermos, adoptando coordenadas adimensionais, obter um único ábaco que nos resolva por completo o problema do regolfo para qualquer caso e qualquer secção e de forma extremamente simples, mais fácil do que a dedução de quaisquer tabelas.

Retomemos a expressão geral e transformêmo-la:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} = i - i \frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c}$$

Examinemos a figura lateral. Vemos imediatamente, como aliás já sabemos da hidráulica que:

$$\frac{dh}{ds} = i - J \qquad (44)$$

---

[1] $m = \dfrac{\text{abcissa (base)}}{\text{ordenada (altura)}}$

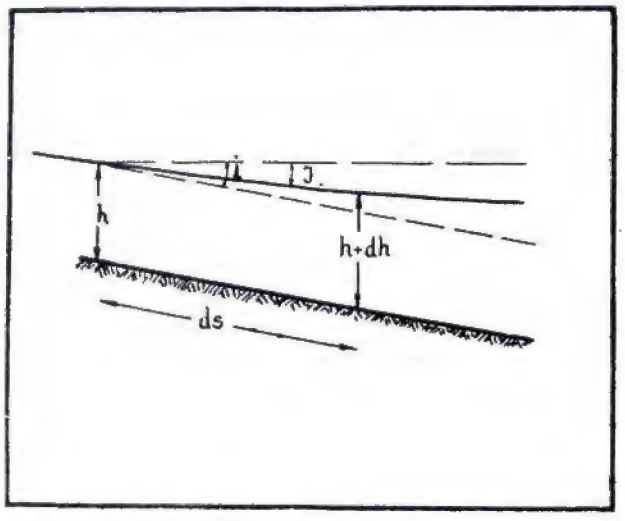


Fig. 1

Temos então

$$J = i\frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} \tag{45}$$

Evidentemente, se nós conhecermos o valor de J em cada ponto, temos possibilidades de, por métodos gráficos ou analíticos, traçar imediatamente a curva do regolfo.

Mas, dividindo por $\Omega_c^2 R_c$ podemos ainda transformar a expressão (45) e obter:

$$J = i\frac{\dfrac{\Omega_u^2 R_u}{\Omega_c^2 R_c} - 1}{\dfrac{\Omega^2 R}{\Omega_c^2 R_c} - 1}$$

e chamando

$$Z = \frac{\Omega^2 R}{\Omega_c^2 R_c} \tag{46}$$

e portanto

$$Z_u = \frac{\Omega_u^2 R_u}{\Omega_c^2 R_c}$$

teremos

$$J = i\frac{Z_u - 1}{Z - 1} = \frac{A}{Z - 1} \tag{47}$$

donde

$$A = i(Z_u - 1) \tag{48}$$

Observemos que na expressão anterior A é uma constante e que as duas variáveis adimensionais J e Z estão relacionadas entre si por uma expressão muito simples

$$J = \frac{A}{Z - 1}$$

Temos para cada valor de A, correspondendo a um caso prático, uma curva exprimindo a relação entre J e Z, isto é, entre a inclinacão da superfície da

água num ponto e um número que nos fornece a profundidade no mesmo ponto. Esta família de curvas é válida para todos os tipos de secções sem nenhuma limitação. Será necessário unicamente encontrar o valor de A correspondente ao caso que nos interessa e trabalhar sôbre a curva correspondente. Podemos evidentemente ter uma infinidade de casos práticos correspondentes ao mesmo valor do número A, que é um número sem dimensões.

Pode-se, então, construir um único ábaco para resolver o problema do regolfo em qualquer tipo de secção. Foi isto o que nós fizemos (ábaco n.º 1), escolhendo convenientemente as escalas. As curvas relacionando J e Z são hipérboles equiláteras, tendo A como parâmetro. As hipérboles situadas na direcção da primeira bissectriz, correspondem a valores de A positivos, isto é, a correntes lentas; àquelas que têm como eixo a direcção da segunda bissectriz correspondem às correntes rápidas e portanto a valores negativos de A.

A assíntota vertical marca o estado crítico e observa-se imediatamente que existe uma discontinuidade neste estado, no qual a inclinação J se torna infinita. O eixo dos Z separa a região das inclinações J positivas da região das inclinações negativas. (Recordamos que a inclinação é tomada em relação à horizontal. É necessário também recordar que nós consideramos positiva neste caso, contràriamente ao que temos feito, uma inclinação que provoca um abaixamento da superfície da água no sentido da corrente).

Podemos ter inclinações positivas: no regime lento quando partimos de uma posicão superior à crítica e no regime rápido quando partimos duma posição inferior; teremos inclinações negativas no caso contrario. Poderíamos fazer uma discussão geral do regolfo, mas não vale a pena, visto que uma discussão análoga é conhecida por todos aqueles que estudaram hidráulica, quando trataram da fórmula de Bresse (canais rectângulares muito largos).

A aplicação do nosso método implica o conhecimento, para cada caso, das caracteristicas do movimento uniforme e do movimento crítico, quer dizer o conhecimento de Ω_u, R_u, Ω_c e R_c. Creio que não é necessário dizer nada a respeito do regime uniforme; no que se refere ao regime crítico, a secção e o raio médio são conhecidos uma vez conhecida a altura crítica h_c; esta pode ser encontrada aplicando as fórmulas já citadas ou no caso geral, em que não seja possível a aplicação da fórmula, adoptando um método muito simples que indicamos a seguir.

Recordemos a fórmula (15) e transformêmo-la

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{b_c}{\Omega_c^3}=1$$

ou

$$\frac{Q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}}=\Omega_c\sqrt{\frac{\Omega_c}{b_c}}$$

Conhecendo a secção podemos obter em função de h, como indica a figura 2, o valor de $\Omega_c\sqrt{\frac{\Omega_c}{b_c}}$. Depois sendo dado Q podemos calcular o valor de $\frac{\sqrt{\alpha}Q}{\sqrt{g}}$ e a ordenada para a qual a abcissa da primeira curva é igual a êste último valor fornecer-nos-á a altura crítica e consequentemente a secção e o raio médio correspondentes. Êste método será empregado raras vezes, visto que já fornecemos valores explícitos de h_c para os casos de secções rectangulares, triangulares, parabólicas e monómias, compreendendo este último tipo quási todos os casos possíveis na natureza.

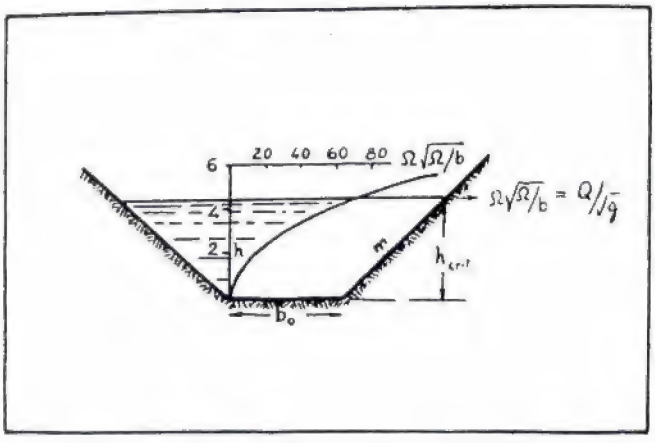


Fig. 2

Uma vez conhecidas as caracteristicas dos movimentos uniforme e crítico, o conhecimento do valor de A é imediato, visto também ser conhecida a inclinação.

Pode acontecer que o valor de A achado não coïncida exactamente com uma das curvas dadas no ábaco, mas tendo em conta que os valores das ordenadas das diferentes curvas são proporcionais aos respectivos valores de A, fácil será traçar uma nova curva por meio de pontos ou achar directamente por multiplicação os valores diversos de J.

Em cada caso prático teremos necessidade de conhecer uma curva que nos forneça os valores de Z em função da altura h. Ora ao calcularmos um canal possuimos geralmente um ábaco que nos fornece os valores da secção Ω e do raio médio R em função da altura, expressões necessárias para os cálculos hidráulicos. É então simples traçar a curva dos valores $\Omega^2 R$ em função da altura. A curva dos Z em função da altura é a mesma, com a única diferença que a unidade será o valor de $\Omega_c^2 R_c$, diferente de caso para caso, posto que Z = 1 corresponde a altura crítica.

A curva $\Omega^2 R$ depende ùnicamente da forma da secção e para facilitar o trabalho do leitor, nós traçámos algumas destas curvas para as secções mais vulgarmente empregadas. Damos a seguir alguns esclarecimentos sôbre as mesmas curvas e o seu emprego.

Secção rectangular muito larga = (ábaco n.º 2)

Traçámos a curva $\Omega^2 R = h^3$ em função de h; ampliou-se numa escala maior a região com alturas inferiores ao valor h = 3.

Seccão rectangular de largura b determinada e não infinita = (ábaco n.º 3)

O diagrama traçado é válido para qualquer valor da largura b; é necessário unicamente recordar que tendo traçado o ábaco para a largura b = 1, é necessário multiplicar as abcissas por b^5 e as ordenadas por b, se se tiver $b \neq 1$.

Secção triangular = (abaco n.º 4)

O diagrama traçado é válido para qualquer inclinação da margem. A primeira parte do diagrama foi aumentada, sendo representada numa escala maior. Se a inclinacão da margem é m, é necessário multiplicar as abcissas por $\frac{m^2}{2\sqrt{1+m^2}}$, quere dizer, para marcar na curva os valores corresponden

tes aos movimentos uniforme e crítico é necessário dividir os valores achados pela expressão citada.

Secção trapézia = (ábaco n.° 5).

Traçámos os diagramas para secções trapézias com margens de inclinação respectivamente igual a 1, 2, $3/2$, $2/3$ e $1/2$ que são as mais vulgarmente empregadas. O ábaco é válido para qualquer largura do fundo da secção ou rasto; no que se refere às escalas devemos repetir o que foi dito na secção rectângular não muito larga para o caso da largura $b \neq 1$.

Foi também amplificado o diagrama para os valores de h inferiores à unidade:

$$h < 1.$$

Vejamos agora qual a maneira de trabalhar com os ábacos. Sabido qual é o caudal que circula no canal, achamos imediatamente as condições de escoamento crítico e de escoamento uniforme; conhecida a inclinação, obtemos o valor de A. Achamos o valor de $\Omega_c^2 R_c$ e marcamos êste valor como unidade de abcissas no diagrama $\Omega^2 R$ correspondente, temos assim o diagrama dos Z em função das alturas. Seja êste diagrama representado pela fig. 3. Suponhamos que a fig. 4 representa a curva do ábaco geral correspondente ao valor de A que nos interessa. Temos ainda (fig. 5) o perfil do leito do canal.

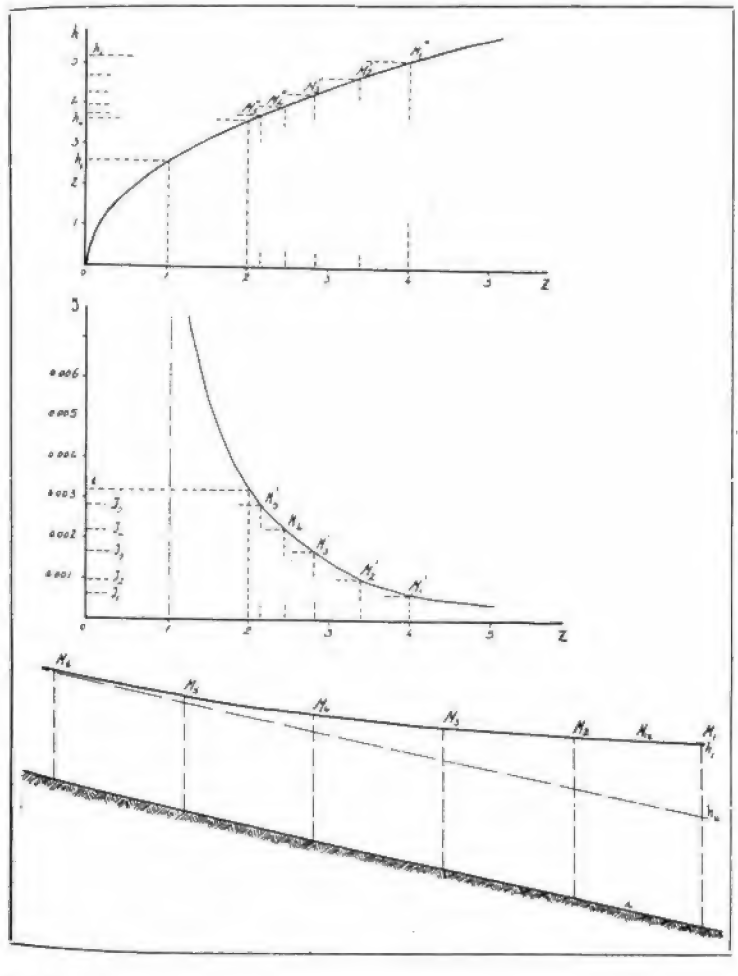


Fig. 3, 4, e 5

No problema existe sempre uma secção, no nosso caso M_1, produzido por uma barragem, uma ponte ou qualquer outro obstáculo ou motivo, cujas

características conhecemos, em especial a altura da água. Temos assim o valor inicial de Z que devemos introduzir nos nossos cálculos; êste valor inicial Z_1, correspondente ao ponto M_1, introduzido no nosso ábaco, fornecer-me-á o ponto M_1 ao qual corresponde a inclinacão superficial J_1. Podemos então, partindo do ponto M_1, traçar a linha da superficie da água, num comprimento maior ou menor conforme a aproximacão desejada. Encontraremos um ponto M_2, ao qual corresponde uma altura h_2 e portanto um valor Z_2 dado pelo ponto M_2. Introduzindo o valor no nosso ábaco encontramos imediatamente a inclinação superficial correspondente, que nos serve para prolongar a linha superficial da corrente. Procedendo sucessivamente da mesma maneira podemos traçar tôda a curva do regolfo. Para obter uma maior aproximação é aconselhável repetir o cálculo para cada ponto a partir das dimensões do ponto intermédio M_{12} entre M_1 e M_2.

Podemos seguir também analìticamente o cálculo da superfície de regolfo. Efectivamente sendo h_1 a profundidade num ponto dado, a profundidade noutro ponto situado a distância l do primeiro será $h_2 = h_1 + l(i - J)$, e obtemos assim o seguinte ponto.

Como vemos, o nosso método, aplicável a qualquer secção é suficientemente rápido e simples.

Estudo crítico das conclusões obtidas.

Quando se estuda qualquer assunto, é necessário examinar objectiva e cuidadosamente a natureza das hipóteses feitas e a influência que elas podem ter sôbre a validade das conclusões deduzidas; as hipóteses admitidas podem, muita vez, ser a causa duma errada interpretação do fenómeno e dum afastamento de realidade.

No nosso estudo, partimos da expressão da energia total supondo $\beta = 1$, quer dizer suposemos um escoamento rectilineo. Esta hipótese, admitida por todos os autores no estudo do. regolfo, e verdadeira, se nos encontrarmos em regiões não muito próximas do estado crítico. Numa região próxima dêste estado, o escoamento deixa de ser rectilíneo e é necessário introduzir a sua curvatura representada pelo coeficiente β diferente da unidade. Para êste caso, correspondente, por exemplo, ao ressalto ondulado, fazer-se-á um estudo particular. A hipótese não falseia a realidade em todos os casos nos quais a nossa fórmula é aplicável.

O mesmo podemos dizer da hipótese feita supondo α = cte.

Admitimos também, de acôrdo, aliás, com todos os autores que trataram do caso e com os resultados experimentais, que a perda de carga ou inclinação da linha de energia no movimento permanente é dada pela mesma expressão que no caso do movimento uniforme.

No que respeita a ter desprezado o termo $\frac{b\chi_c}{b_c\chi}$ já justificámos a nossa atitude. Também já fizemos referência aos casos em que a largura superficial b é uma função decrescente da profundidade h.

É necessário, ainda, fazer uma observação em relação ao estado crítico: Nos casos nos quais a secção $\Omega = f(h)$ apresenta discontinuidades como, por exemplo, no caso da existência duma secção mista, formada por leito maior e leito menor, é possível a existência de duas soluções para a altura crítica, que não é então univocamente definida. Nestes casos, podemos empregar o nosso método ou fórmula somente numa das regiões, como seja, o leito menor, por exemplo. A passagem do leito menor para o leito maior faz-se por meio duma descontinuidade nas características do movimento, manifestada por uma discontinuïdade da superfície, com uma distribuição não hidrostática das pressões.

A FOTOELASTICIDADE NO ENSINO E NA TÉCNICA[1]

MANUEL MENDES DA ROCHA
Eng. Civil. Assistente do I.S.T e Bolseiro do I.A.C
Publicado na Técnica n.º 122 de Julho de 1941

Honra-se a "Técnica" com o publicar hoje em suas páginas, devidamente modificada pelo Autor, a notável conferência proferida, a convite da já benemérita Secção Cultural da A.E.I.S.T., pelo Eng.º Mendes da Rocha.

Os numerosos engenheiros e alunos que tiveram a dita de a escutar, certamente a vão meditar de novo, na convicção de muito terem a lucrar com tal. Quanto aos que a não ouviram, ousamos pedir-lhes que a leiam e garantir-lhes que não terão de que se arrepender.

Alto serviço prestou à nossa Escola o sr Eng.º Mendes da Rocha. Bem haja! Em grande parte graças à sua dedicação, começa a ser consoladora realidade o que há tanto é aspiração de todos os que servem — o nosso Laboratório de Elasticidade e Resistência de Materiais, o qual aguarda, agora, a prova de interêsse, mais que .devido e que decerto não faltará, dos alunos do I. S. T., e até dum modo geral, de todos os engenheiros portugueses.

1 — No relatório dum trabalho que apresentei em 1938 ao Instituto para a Alta Cultura, dizia: "as numerosas dificuldades que me surgiram no curso de Engenharia Civil, levaram-me a concluir a insuficiência do cálculo, para a resolução de grande parte dos problemas postos pela técnica e a necessidade flagrante de recorrer a métodos experimentais para a obtenção de soluções satisfatórias"

A minha permanência nos Estados Unidos, como bolseiro dêsse Instituto, veio confirmar esta idea e dum modo geral fez-me sentir a necessidade que existe de destruir a nossa tendência apriorística, que tem sido alimentada pelo ensino livresco das ciências aplicadas, devendo reconhecer-se a experiência vivida como a melhor fonte de aquisição do conhecimento.

Devido à maneira como é feito o ensino neste Instituto, o aluno fica com uma idea falsa do modo como progride o conhecimento, não dando à experiência o valor essencial que ela tem no desenvolvimento da ciência, julgando que esta progride reflectindo sôbre a já muito desacreditada "essência íntima das coisas". Mesmo no ensino das ciências puras, os métodos usados dão uma falsa idea do seu valor e da maneira como elas evoluem.

2 — No ensino da engenharia um dos principais fins a alcançar é a formação de pessoas capazes do cálculo de máquinas e estruturas, isto é, capazes de utilizar os materiais de construção com economia e segurança.

Para se atingir êste fim há necessidade de conhecer a distribuição das tensões desenvolvidas nos corpos sólidos, em repouso ou movimento, submetidos à acção de fôrças.

Vejamos como se ataca um problema de determinação de tensões elásticas.

---

[1] Conferência promovida pela Secção Cultural da A.E.I.S.T. e realizada no Instituto Superior Técnico em 11 de Junho de 1941

Consideremos para concretizar o caso duma viga simplesmente apoiada submetida a uma fôrça F actuando normalmente ao eixo da viga e a meio do seu vão. Suponhamos que a espessura da viga é suficientemente pequena, de modo a podermos considerá-la em equilíbrio elástico plano.

Dum modo geral o que se pretende é determinar o estado de solicitação elástica num ponto qualquer P de coordenadas (x, y), isto é, conhecer as tensões normais σ_x e σ_y, e a tensão tangencial τ_{xy}.

Se desprezarmos as fôrças mássicas actuantes sôbre a viga, então σ_x, σ_y e τ_{xy} devem satisfazer ao seguinte sistema de equações às derivadas parciais:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \dfrac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} = 0 \\ \dfrac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \dfrac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} = 0 \\ \left(\dfrac{\delta^2}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2}{\delta y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

fornecido pela teoria de elasticidade para um equilíbrio plano qualquer.

Há infinitas funções σ_x, σ_y e τ_{xy} de x e y satisfazendo a estas equações. Façamos:

$$\begin{cases} \sigma_x = ay \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

sendo $a \lessgtr 0$. É fácil de verificar que estas funções satisfazem ao sistema, mas vamos mostrar que êstes não são os valores de σ_x, σ_y e τ_{xy} que satisfazem ao nosso problema. Efectivamente vejamos quais os valores de σ_x, σ_y e τ_{xy} nos pontos da face AB da viga; para êstes pontos é x = 1, e y variável de -h a +h; portanto vem:

$$\begin{cases} \sigma_x = ay \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Mas nestes pontos da superfície da viga tem de ser σ_x =0, pois nêles não actua nenhuma fôrça exterior. Então σ_x, σ_y e τ_{xy} devem ser funções de x e y que além de satisfazerem ao sistema (1), satisfaçam também as chamadas condições aos limites, isto é, estas funções devem ser tais que na superfície da peça equilibrem as fôrças exteriores aplicadas.

Assim no caso considerado σ_y deve ser uma função de x e y tal que para $y = -h$ tome o valor zero para todos os valores de x desde -1 a +1 excepto na vizinhança de x = 0, onde σ_y deve equilibrar a fôrça F aplicada.

Há em regra impossibilidade de determinar funções que satisfaçam simultâneamente ao sistema (1) e às condições aos limites, isto é, a teoria da elasticidade é, em geral, impotente para resolver os problemas de determinação de tensões.

Para dar uma idea da complexidade dêstes problemas, apresento a solução obtida em 1927 por Seewald para o problema da viga submetida à fôrça F:

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y + \frac{F}{e\pi}\int_0^\infty \frac{(\lambda h.ch\,\lambda h - sh\,\lambda h)\,ch\,\lambda y - sh\,\lambda h.\lambda y.sh\,\lambda y}{sh\,2\,\lambda h - 2\,\lambda h}\cos\lambda x \quad d\lambda -$$

$$-\frac{F}{e\pi}\int_0^\infty\left[\frac{(\lambda h.sh\,\lambda h-ch\,\lambda h)sh\,\lambda y-ch\,\lambda h.\lambda y.ch\,\lambda y}{sh\,2\lambda h-2\lambda h}+\frac{12y}{8h^3\lambda^2}\right]\cos\lambda x\quad d\lambda$$

$$\sigma_y=-\frac{F}{e\pi}\int_0^\infty\frac{(\lambda h.ch\,\lambda h+sh\,\lambda h)ch\,\lambda y-sh\,\lambda y.\lambda y.sh\,\lambda y}{sh\,2\lambda h+2\lambda h}\cos\lambda x\quad d\lambda+$$

$$+\frac{F}{e\pi}\int_0^\infty\frac{(\lambda h.sh\,\lambda h+ch\,\lambda h)sh\,\lambda y-ch\,\lambda h.\lambda y.ch\,\lambda y}{sh\,2\lambda h-2\lambda h}\cos\lambda x\quad d\lambda$$

$$\tau_{xy}=-\frac{F}{e\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda h.ch\,\lambda h.sh\,\lambda y-sh\,\lambda y.\lambda y.ch\,\lambda y}{sh\,2\lambda h+2\lambda h}sen\,\lambda x\quad d\lambda+$$

$$+\frac{F}{e\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda h.sh\,\lambda h.ch\,\lambda y-ch\,\lambda h.\lambda y.sh\,\lambda y}{sh\,2\lambda h-2\lambda h}sen\,\lambda x\quad d\lambda$$

onde M é o momento flector na secção transversal de abcissa x, I o momento de inércia da secção em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e e a espessura da viga.

Como se vê a tensão σ_x, pode decompor-se em duas partes, a primeira é o valor calculado pela fórmula elementar da resistência de materiais, a segunda representa o efeito produzido pela carga na vizinhança do seu ponto de aplicação.

Esta solução ainda é válida sòmente na hipótese do vão 2l ser suficientemente grande em relação a altura 2h da viga.

Na hipótese do vão ser qualquer o problema ainda não está resolvido.

Se a viga estiver submetida a fôrças quaisquer o problema será ainda mais dificil de resolver.

Para o caso dum corpo qualquer submetido a fôrças quaisquer pode, do exemplo elementar citado, avaliar-se a dificuldade de resolução do problema.

3 — Há por isso necessidade de recorrer a teorias particulares como a teoria da flexão das vigas, teoria da torsão dos prismas, teoria da flexão das placas, etc., reünidas hoje sob a designação de resistência de materiais.

Assim no caso duma viga submetida à flexão simples, isto é, sujeita a binários actuantes nos extremos, estabelece-se uma teoria baseada na hipótese de que as secções transversais se mantêm planas após a flexão e desta hipotese resulta a possibilidade de determinar as tensões elásticas num ponto qualquer da peça.

Se a viga estiver submetida a fôrças normais ao eixo tambem a resistência de materiais permite a determinação das tensões num ponto qualquer. Mas neste caso, contràriamente ao que afirmam muitos autores, as secções transversais já não se mantêm planas após a deformação, devido à influencia do esfôrço transverso. A teoria feita por êsses autores contém uma contradição interna sendo contudo legítimas as conclusões a que chegam. Na flexão produzida por cargas normais ao eixo da viga o perfil duma secção transversal toma depois da flexão a forma duma parábola cúbica cuja equação referida à tangente ox e à normal oy ao eixo da viga, é:

$$x=-\frac{3}{2}\frac{\tau_m}{G}\left(y-\frac{y^3}{3h^2}\right)$$

onde τ_m representa a tensão tangencial média na secção e G o módulo de elasticidade de corte da substância da viga.

As teorias da resistência de materiais têm o grande inconveniente de serem aplicáveis sòmente a casos particulares. Assim a teoria da flexão das vigas dá valores aceitaveis sòmente no caso do vão ser suficientemente grande em relação às dimensões transversais da viga e além disso ùnicamente em pontos suficientemente afastados dos pontos de aplicação das fôrças exteriores, como veremos adiante.

Esta restrição é geral: todos os resultados da resistência de materiais só são legítimos a uma distância suficientemente grande dos pontos de aplicação das fôrças.

Da falta de generalidade das teorias da resistência de materiais resulta muitas vezes a necessidade de recorrer a métodos experimentais para a determinação das tensões nos corpos sólidos deformados. Mesmo para os casos em que os métodos analíticos fornecem resultados satisfatórios, o estudo experimental é indispensável pois fornece um conhecimento mais perfeito e duradouro.

Dêstes métodos experimentais o mais importante tanto sob o ponto de vista pedagógico, como pelas suas aplicações técnicas, é o da fotoelasticidade.

4 — A fotoelasticidade estuda o efeito das tensões elásticas sôbre as radiações luminosas.

Consideremos um paralelipípedo duma substância transparente, por exemplo, baquelite, e exerçamos sôbre duas faces opostas uma compressão; então a baquelite primitivamente monorefringente, torna-se birefringente, isto é, após a aplicação da compressão, a um raio de luz incidente AO corresponderão dois refractados OB e OB'.

Consideremos uma placa delgada de espessura e, de substância transparente, homogénea e isótropa, submetida a um sistema de fôrças F_1, F_2 ...., paralelas às faces da placa e actuantes nos seus bordos: é o que se chama um equilíbrio elástico plano.

É o caso de muitos equilíbrios que aparecem na construção, tais como de vigas de pequena espessura, de muitas estruturas isostáticas e hiperstáticas, etc.

Se examinarmos esta placa .com luz polarizada observar-se-á uma figura que se modifica com as fôrças a que está submetida a peça.

No caso duma viga de baquelite submetida a uma fôrça F actuante a meio do vão, obteve-se a fig. 5.

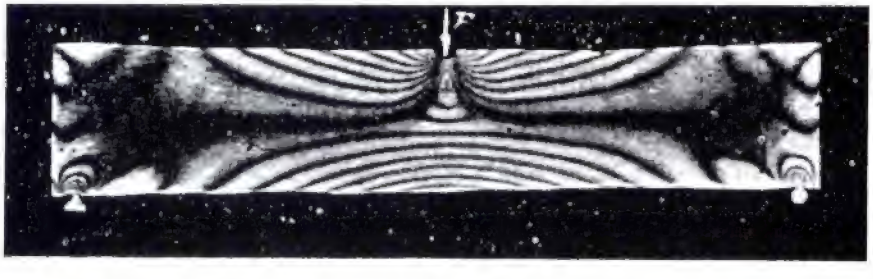


Fig. 5

Vamos ver como no caso duma placa qualquer se relaciona a figura obtida com as tensões elásticas desenvolvidas.

Num ponto P da placa, qualquer elemento de superfície normal às faces estará submetido a uma tensão normal σ e a uma tensão tangencial τ, paralelas às faces da placa; há, como mostra a teoria da elasticidade, em cada ponto P dois elementos de superfície ortogonais entre si sôbre os

quais se exercem sòmente tensões normais σ_1 e σ_2, chamadas tensões principais no ponto P.

Para que o estado de tensão da placa fique completamente determinado é necessário conhecer para cada ponto:

a) a direcção das tensões principais, isto e, o ângulo α que faz uma delas, com uma direcção de referência.

b) a grandeza σ_1 e σ_2 das tensões principais.

O problema da determinação das tensões num equilíbrio elástico plano é pois um problema a 3 incógnitas: α, σ_1 e σ_2.

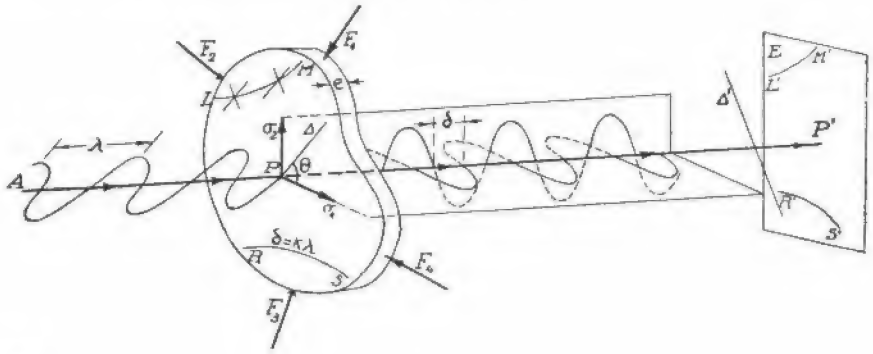


Fig. 6

Suponhamos que um raio de luz monocromática polarizada, AP, vibrando paralelamente a uma direcção Δ, incide normalmente às faces da placa.

Êste raio sofrerá ao encontrar a placa, que está submetida a fôrças, uma dupla refracção.

À saida da placa temos, com a mesma direcção do raio incidente, dois raios polarizados vibrando paralelamente às direcções das tensões principais σ_1 e σ_2 no ponto P. Estes dois raios apresentam uma diferença de marcha δ; mostra a experiência que δ; é proporcional à espessura e da placa e à diferenca das tensões principais, isto é:

$$\delta = ce(\sigma_1 - \sigma_2)$$

sendo c uma constante que depende da substancia da placa e do comprimento de onda λ da luz incidente.

Após a placa coloquemos um polarizador numa posição tal que permita a passagem de vibrações na direcção Δ' perpendicular a Δ. Êste polarizador chama-se analisador e diz-se que está cruzado com o polarizador que forneceu o raio incidente AP.

Recebamos num ecran E a luz transmitida pelo sistema.

Mostra a óptica ondulatória que a intensidade de iluminação I no ponto P' do ecran é dada pela expressão:

$$I = k\, sen^2\, 2\theta\, sen^2\, \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

onde k é uma constante.

Haverá extinção de luz no ponto P' quando fôr I = 0; esta condição dá-se:

a) quando θ fôr um múltiplo de $\frac{\pi}{2}$, isto é, quando as direcções Δ .e Δ' forem paralelas às direcções das tensões principais do ponto P.

b) quando δ fôr um múltiplo de λ, isto é, quando o atrazo dos dois raios emergentes fôr um número inteiro de comprimentos de onda.

Vejamos agora a figura de interferência que se obtém no écran quando iluminamos não sòmente o ponto P, mas tôda a placa por um feixe de luz polarizada vibrando paralelamente à direcção Δ.

Ao lugar geométrico LM dos pontos da placa nos quais as direcções das tensões principais são paralelas às direcções Δ e Δ' corresponderá no écran uma linha negra L' M'. Esta linha é chamada isoclínica porque em todos os seus pontos as direcções das tensões principais têm a mesma inclinação em relação a uma direcção de referência.

Como as direcções Δ e Δ' são conhecidas fica assim determinado o valor de α correspondente à isoclínica.

A fig. 5 mostra uma isoclínica que está representada na fig. 7; para esta isoclínica α =45º, quando se toma a direcção de F para direcção de referência.

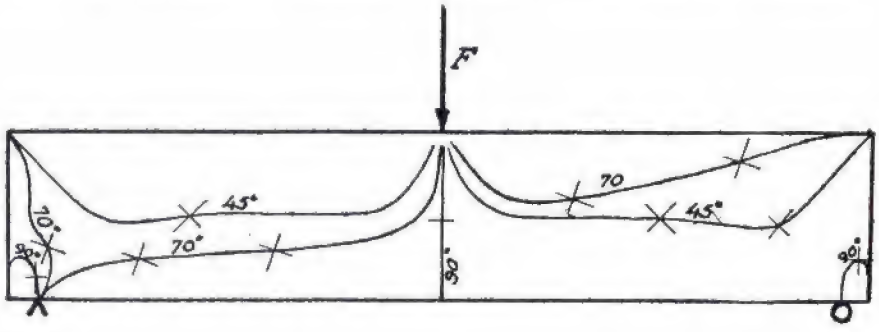


Fig. 7

Se se rodar o sistema dos polarizadores mantendo-os cruzados então a isoclínica deforma-se e ao cabo duma rotação de 90º a curva percorreu necessàriamente tôda a peça.

No caso da viga submetida à fôrça F, as figs. 8 e 9 mostram as isoclínicas correspondentes respectivamente a α =70º e α =90º; estas isoclínicas estão representadas na fig. 7.

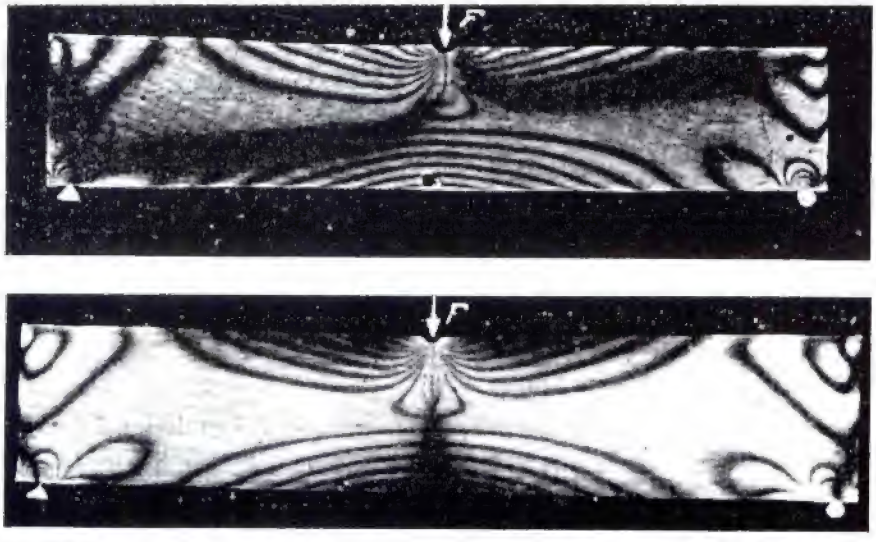


Fig. 8 e 9

A partir das isoclínicas pode fazer-se o traçado das isostáticas que são as envolventes das direcções das tensões principais; é um trabalho gráfico fácil de executar.

Na fig. 10 estão representadas as isoclínicas e as isostáticas no caso de duas rodas dentadas.

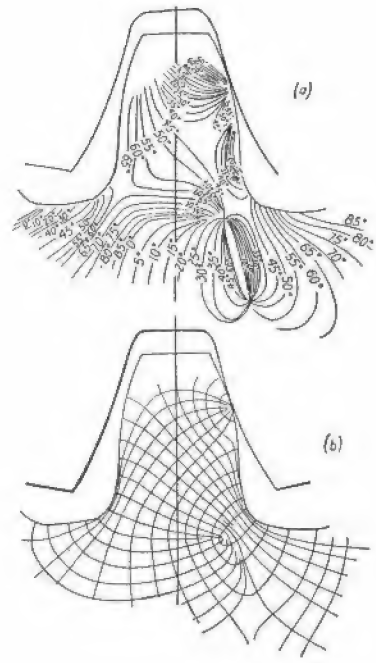


Fig. 10

Mas como vimos também há extinção nos pontos onde δ fôr um múltiplo de λ, e portanto na imagem aparecem também linhas negras que correspondem aos lugares geométricos dos pontos da placa nos quais a diferença de marcha é λ, 2λ,....

Enquanto que a linha negra isoclínica varia de forma com a posição dos polarizadores, as linhas negras de igual diferença de marcha têm forma invariável; esta circunstância permite distingui-las.

Demonstra-se que se introduzirmos entre o polarizador e a placa uma lâmina quarto de onda, e entre a placa e o analisador outra lâmina quarto de onda cruzada com a primeira, na figura de interferência desaparecem as isoclínicas permanecendo invariáveis as linhas de igual diferença de marcha. A fig. 11 foi obtida introduzindo as lâminas quarto de onda; desapareceram as isoclínicas, sendo mais fàcilmente observáveis as linhas de igual diferença de marcha.

Para se determinar o atrazo num ponto qualquer P basta contar o número de linhas negras que passa por êle durante a operação de aplicação das fôrças. Efectivamente quando passa no ponto pela primeira vez uma linha negra isto indica que o atrazo atingiu o valor λ, quando passa outra atingiu o valor 2λ, e assim sucessivamente.

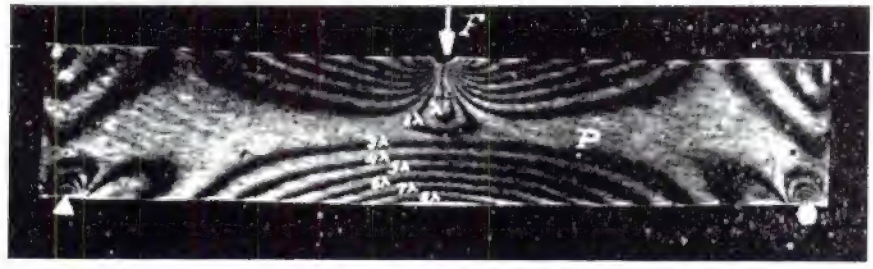


Fig. 11

Na fig. 11 estão indicados os atrazos correspondentes às linhas de igual diferença de marcha. Pelo ponto médio inferior da viga passaram 8 linhas, o que indica que nêle o atrazo é superior a 8λ,

Como vimos:

$$\delta = ce(\sigma_1 - \sigma_2)$$

donde

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{ce}$$

Como δ é constante ao longo das linhas negras, estas são lugares geométricos de pontos da placa nos quais a diferença das tensões principais é constante, tendo o valor:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{ce},$$

sendo n um número inteiro.

Fazendo $\frac{\lambda}{c} = k$, vem:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{kn}{e}.$$

Podemos assim determinar a diferença das tensões principais nos pontos das linhas de igual diferença de marcha; num ponto que não pertença a estas linhas determina-se esta diferença por interpolação.

Consideremos o caso, estudado pelo prof. Frocht, duma viga de baquelite com 2 l = 6" e 2 h = 1" submetida a uma fôrça F = 130,6 lb .

O diagrama I da fig. 12 mostra a distribuição da diferença das tensões principais ao longo duma secção transversal da viga à distância 0,1" do ponto de aplicação da fôrça; esta diferença apresenta um máximo absoluto na vizinhança da face superior da viga e um máximo relativo na face inferior.

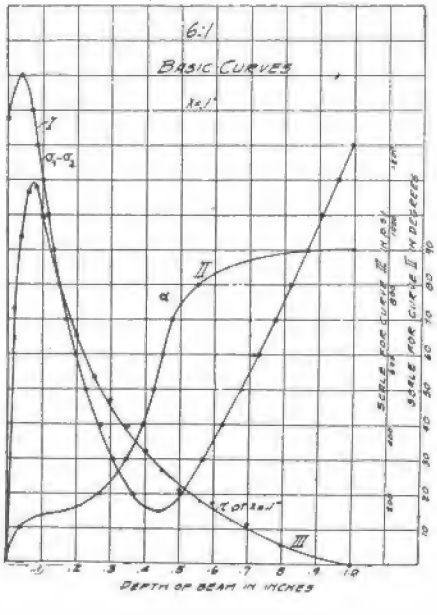


Fig. 12

A tensão tangencial τ actuante num elemento de superfície desta secção é dada pela conhecida expressão:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sen\, 2\alpha,$$

sendo α o ângulo duma das tensões principais com a normal ao elemento; é dado pelas isostáticas.

O diagrama II da fig. 12 dá a distribuição dos valores α ao longo da secção transversal considerada. O diagrama III representa os valores de τ calculados pela expressão anterior.

Ora a teoria da flexão da resistência de materiais afirma que a tensão tangencial τ está distribuida ao longo da secção transversal da viga segundo uma lei parabólica.

O cálculo de τ a partir dos valores obtidos experimentalmente para $\sigma_1 - \sigma_2$ e α forneceu para diferentes secções transversais as curvas da fig. 13 que não tem analogia alguma com a parábola.

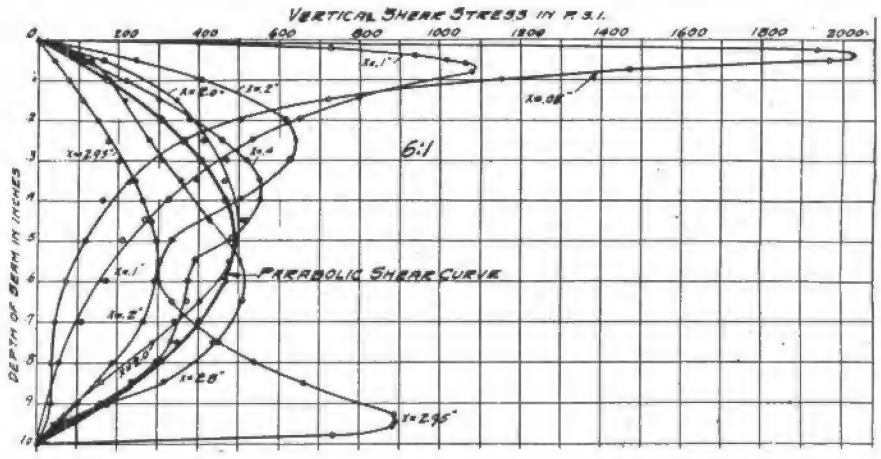


Fig. 13

Comparando as curvas desta figura vê-se que à medida que nos afastamos do ponto de aplicação de F elas tendem para a parábola, mas quando nos aproximamos dos apoios as curvas vão-se de novo afastando da parábola.

Como se vê a lei parabólica está longe de fornecer bons resultados, observando-se no caso apresentado tensões tangenciais cêrca de 4 vezes a tensão tangencial máxima dada pela lei parabólica; além disso a tensão tangencial máxima não se dá na superficie média como supõe a teoria elementar, mas sim na vizinhança do ponto de aplicação da fôrça.

Estes resultados experimentais estão de acôrdo com a solução de Seewald que apresentámos.

As discordâncias que apontámos entre os valores observados e os fornecidos pela lei parabólica da resistência de materiais têm importância sobretudo no cálculo de vigas de betão nas quais haverá a considerar tensões tangenciais maiores do que habitualmente se tomam, e também no cálculo de vigas I nas quais as abas devem estar submetidas a uma tensão tangencial importante; a repartição da tensão tangencial nas abas dos I deve ser bastante complexa pois não é legítimo supor que a tensão tangencial num ponto é paralela ao esfôrço transverso, suposição que se faz legìtimamente para as secções rectangulares.

As figs. 14 e 15 mostram as linhas de igual diferença de tensões principais em vigas de pequeno e grande vão submetidas respectivamente a uma carga distribuida e a uma carga concentrada. Comparando as figs. 11 e 15 vê-se quanto importante é o valor da relação $\frac{h}{l}$ na distribuição das tensões.

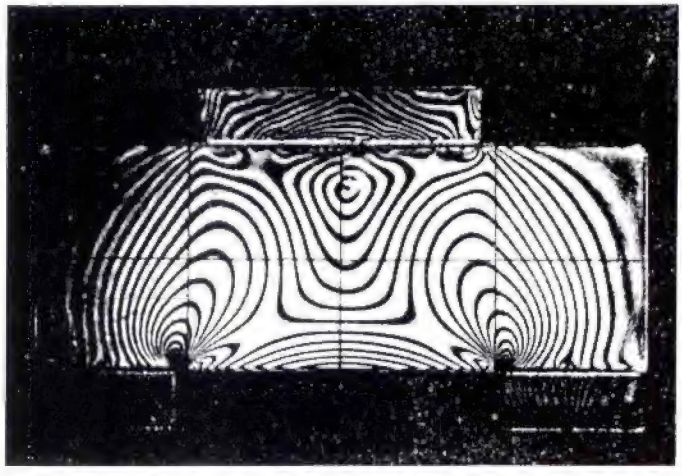


Fig. 14

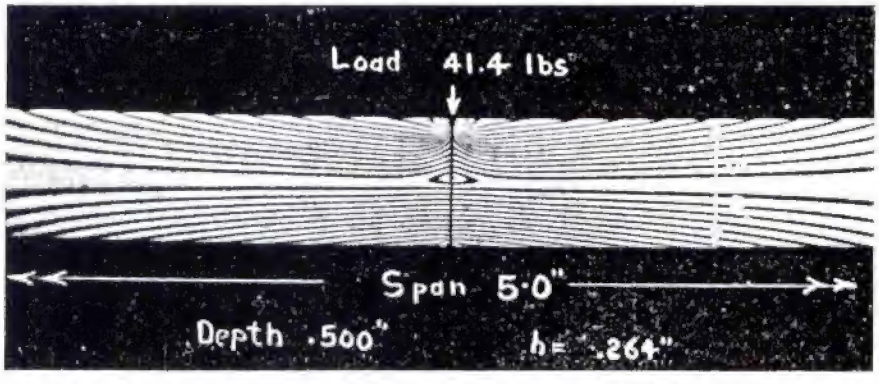


Fig. 15

A fig. 16 representa as linhas de igual diferença de tensões principais numa viga submetida à flexão simples. Comparando esta figura com a 11 vê-se a grande diferença que existe entre a flexão simples e a flexão produzida por fôrças perpendiculares ao eixo da viga. Na flexão simples, a uma distância suficientemente grande dos apoios, as linhas de igual diferença de tensões principais são paralelas, o que indica que em tôdas as secções o estado de solicitação elástica é o mesmo; àlém disso as linhas estão igualmente espaçadas, isto é, a diferença das tensões principais varia ao longo duma secção transversal segundo uma lei linear. Mas como na flexão simples uma das tensões principais é nula, conclui-se desta experiência que a tensão longitudinal na flexão simples distribuída está ao longo duma secção segundo uma lei linear, como é sabido.

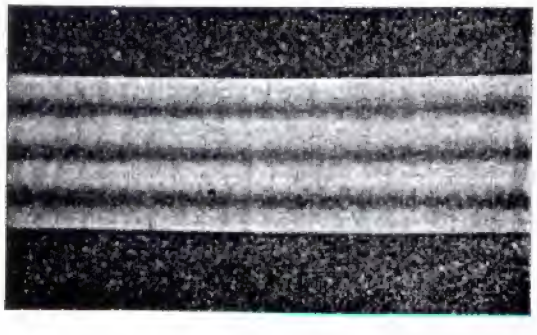


Fig. 16

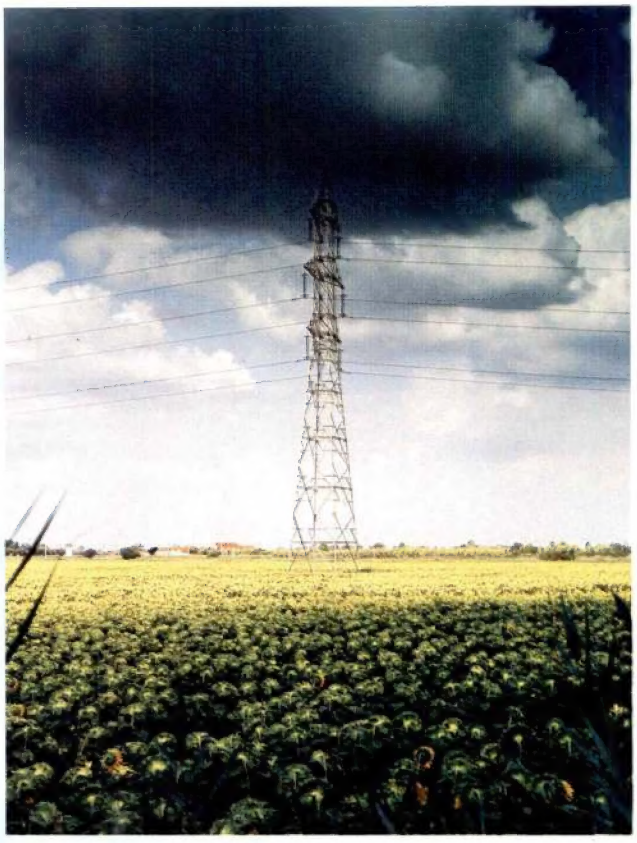
Temos acompanhado esta exposição com o estudo da flexão de vigas de secção rectangular.

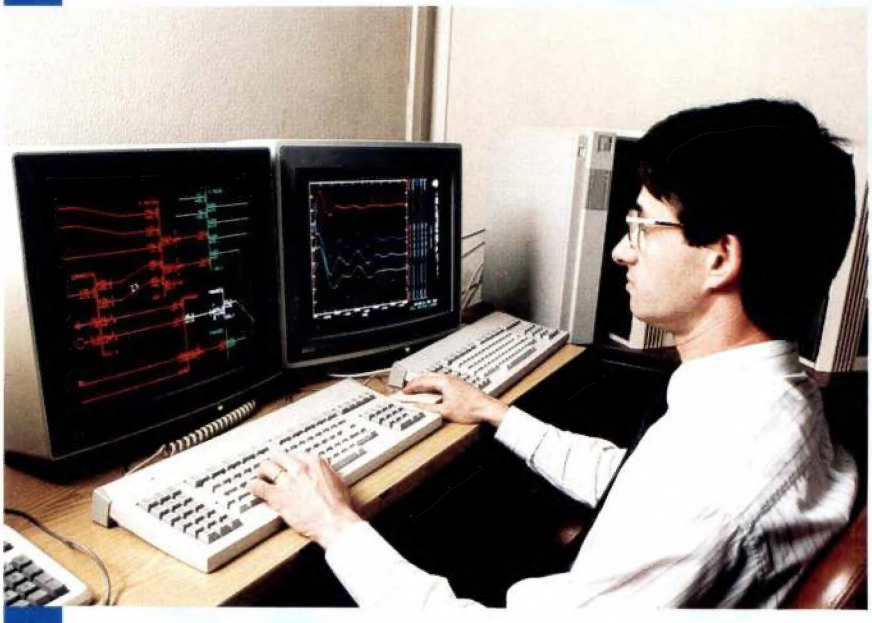
O estudo da flexão de peças prismáticas é fundamental pois grande parte das estruturas são constituídas por conjuntos de peças prismáticas submetidas à flexão. Achamos por isso muito útil fazer um estudo completo de casos elementares de flexão, pois que se para êstes já se fizer um estudo grosseiro, será certamente muito deficiente o estudo de casos mais complexos.

Num ponto qualquer duma peça em equilibrio elástico plano já sabemos determinar a direcção das tensões principais, definida por α e a diferença $\sigma_1 - \sigma_2$ das tensões principais.

Com uma extensa rede de cerca de 6000 km de linhas de muito alta tensão e 40 subestações de transformação, que cobrem todo o país, a **REN, Rede Eléctrica Nacional, S.A. (Grupo EDP)** assegura o transporte de energia eléctrica entre as centrais onde é produzida e os centros de consumo.

O seu poderoso Centro de Controlo nacional coordena o Sistema Eléctrico de Abastecimento Público garantindo que a energia eléctrica, que em cada instante é necessária, seja disponibilizada da forma mais económica e eficiente.





Uma sofisticada rede de telecomunicações,própria, suporta os Centros de telecontrolo regional e os sistemas de automatização que controlam em tempo real cada uma das instalações da rede de transporte e interligação.

A REN conta com a colaboração de 150 engenheiros e outros técnicos altamente especializados para manter os altos padrões de qualidade de serviço de que se orgulha.

QUALIDADE SEGURANÇA

RIGOR TÉCNICO

GRUPO EDP

REN

Rede Eléctrica Nacional; S.A.

Um mundo
que se constrói
dia-a-dia.

Um projecto
que se renova,
abrindo novos
caminhos ao futuro.

METROPOLITANO DE LISBOA
Quanto mais Metro, mais perto.

Ciência e Tecnologia para antecipar o futuro.

*Programa Praxis XXI**

*Programa Stride**

Programa Base de Investigação Científica e Tecnológica (PBICT)

Programas Específicos:

Ciências da Saúde

Ambiente

Ciências Sociais e Humanas

Lusitânia

Ordenamento do Território e Desenvolvimento Urbano

Cooperação Universidade-Empresa

Formação e Mobilidade de Recursos Humanos

Fundo de Apoio à Comunidade Científica (FACC)

Cooperação Internacional em C&T

Acções de Apoio Geral ao Sistema Científico

Co-financiado pela Comissão Europeia e pelo Estado Português*

junta nacional de investigação científica e tecnológica

Av. D. Carlos I, 126
1200 LISBOA
Telefs.: 397 90 21 / 7
Telex: 12 290 JUNIC-P
Telefax: 60 74 81
End. Teleg.: JUNIC-LISBOA
E-mail : jnict@geral.jnict.mailpac.pt

SECRETARIA DE ESTADO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MINISTÉRIO DO PLANEAMENTO E DA ADMINISTRAÇÃO DO TERRITÓRIO